Exemplul 1

Vom rezolva cu ajutorul algoritmului ADITIV problema de programare bivalentă:

$$(P)\begin{cases}(\min) f = 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 + x_4 - 6x_5 + x_6 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 - 7x_6 \geq 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 + x_5 + 2x_6 \leq 2 \\ 2x_1 + 8x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 + 3x_6 \leq 7 \\ x_1,\dots,x_6 \in \{0,1\}\end{cases}$$

Pregătirea problemei. Aducem problema la forma buna:

- maximizăm $g(x) = -\ f(x) = 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 + x_4 - 6x_5 + x_6$
- efectuăm substituțiile: $x_2 \leftarrow 1 - x_2,\ x_3 \leftarrow 1 - x_3,\ x_5 \leftarrow 1 - x_5$

Rezultă problema:

$$(PB)\begin{cases}(\max) g = 14 - 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 - x_4 - 6x_5 - x_6 \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 + 7x_6 \leq -3 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 - x_5 + 2x_6 \leq -1 \\ 2x_1 - 8x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 \leq 4 \\ x_1,\dots,x_6 \in \{0,1\}\end{cases}$$

Punem în evidență matricea A. În dreapta acestei matrici vor fi trecute progresiv ecarturile acelor combinații din Ω care nu sunt soluții admisibile.

A^1	A^2	A^3	A^4	A^5	A^6	$e(s^1)$	$e(s^2)$	$e(s^4)$
-3	-2	-1	-2	1	7	-3	-1	1
1	-3	1	5	-1	2	-1	2	-3
2	-8	3	1	2	3	4	12	11

Soluțiile efectiv generate de algoritm vor fi notate, în ordinea apariției lor, cu s^1, s^2, …

Aplicarea algoritmului aditiv.

START $\quad x_{CMB} = \varnothing \quad z_{CMB} = -\infty$

Soluția curentă ≡ prima soluție generată $s^1 = \theta = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$
$e(s^1) = b = (-3, -1, 4)$
$g(s^1) = 14$

ITERAȚIA 1. ***Pasul 1***

- s^1 nu este o soluție admisibilă. Trecem ecartul ei în tabel;
- determinăm direcțiile de înaintare din s^1, recomandabile:

$I(s^1) = \varnothing$, $J(s^1) = \varnothing$, nu există deocamdată direcții care să ne ducă sub $z_{CMB} = -\infty \Rightarrow K(s^1) = \varnothing$; $L(s^1) = \{6\}$ deci $R(s^1) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Pasul 2 Construim inegalitățile:

$i = 1 \quad e_1(s^1) = -3 < 0; \sum_{j \in R(s^1)} (a_{1j})^- \le e_1(s^1) \Leftrightarrow (-3) + (-2) + (-1) + (-2) + 0 \le -3$ (A)

$i = 2 \quad e_2(s^1) = -1 < 0; \sum_{j \in R(s^1)} (a_{2j})^- \le e_2(s^1) \Leftrightarrow 0 + (-3) + 0 + 0 + (-1) \le -1$ (A)

Testul de admisibilitate este trecut.

Calculăm indicatorii de admisibilitate pentru succesorii „recomandabili" w^j, unde

$w^j = s^1 \ (x_j \leftarrow 1)$, adica acel succesor obtinut din s^1 prin acordarea valorii 1 variabilei x_j, $j \in R(s^1) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$j = 1 \quad e(w^1) = e(s^1) - A^1 = (0, -2, 2) \Rightarrow a(w^1) = -2$
$j = 2 \quad e(w^2) = e(s^1) - A^2 = (-1, 2, 12) \Rightarrow a(w^2) = -1$
$j = 3 \quad e(w^3) = e(s^1) - A^3 = (-2, -2, 1) \Rightarrow a(w^3) = -4$
$j = 4 \quad e(w^4) = e(s^1) - A^4 = (-1, -6, 3) \Rightarrow a(w^4) = -7$
$j = 5 \quad e(w^5) = e(s^1) - A^5 = (-4, 0, 2) \Rightarrow a(w^5) = -4$

Succesorul w^2 are cel mai mare indicator de admisibilitate. Ne deplasăm (în graful soluțiilor G) din s^1 pe direcția $k = 2$ către $w^2 = s^1 \ (x_2 \leftarrow 1) = (0, 1, 0, 0, 0, 0)$.

Mutăm direcția 2 din $R(s^1)$ în $J(s^1)$ deoarece de acum ea este o direcție „deja cercetată".

$J(s^1) = \{2\} \qquad R(s^1) = \{1, 3, 4, 5\}$

Soluția curentă (a 2-a soluție generată) $s^2 = w^2 = (0, 1, 0, 0, 0, 0)$.

Reținem: - ecartul noii soluții $e(s^2) = (-1, 2, 12)$
- valoarea funcției obiectiv în noua soluție: $g(s^2) = g(s^1) + c_2 = 14 - 3 = 11$

ITERAȚIA 2. *Pasul 1*

- s^2 nu este o soluție admisibilă. Trecem ecartul ei în tabel;
- determinăm direcțiile de înaintare din s^2, recomandabile:

mai întâi să observăm că din s^2 nu există direcții de înaintare care să ne ducă sub $z_{CMB} = -\infty$ şi astfel $I(s^2) = \{2\}$, $J(s^2) = \varnothing$; $L(s^2) = \{5, 6\}$, $K(s^2) = \varnothing$ deci $R(s^2) = \{1, 3, 4\}$

Pasul 2 Construim inegalitățile (*)

$i = 1 \quad e_1(s^2) = -1 < 0; \sum_{j \in R(s^2)} (a_{1j})^- \le e_1(s^2) \Leftrightarrow (-3) + (-1) + (-2) \le -1$ (A)

Testul este trecut.

Calculăm indicatorii de admisibilitate ai succesorilor „recomandabili"

$w^j = s^2 \ (x_j \leftarrow 1), \qquad j \in R(s^2) = \{1, 3, 4\}$

$j = 1 \quad e(w^1) = e(s^2) - A^1 = (2, 1, 10) \Rightarrow a(w^1) = 0$
$j = 3 \quad e(w^3) = e(s^2) - A^3 = (0, 1, 9) \Rightarrow a(w^3) = 0$
$j = 4 \quad e(w^4) = e(s^2) - A^4 = (1, -3, 11) \Rightarrow a(w^4) = -3$

Succesorii w^1 şi w^3 sunt chiar soluţii admisibile. Deoarece $c_1 = -2 > -5 = c_3$ preferăm w^1. În graful soluţiilor G ne deplasăm din s^2 pe direcţia $k = 1$ către $w^1 = s^2(x_1 \leftarrow 1) = (1, 1, 0, 0, 0, 0)$.

Mutăm direcţia 1 din $R(s^2)$ în $J(s^2)$:

$$J(s^2) = \{1\} \qquad R(s^2) = \{3, 4\}$$

Soluţia curentă (a 3-a soluţie generată) $s^3 = w^1 = (1, 1, 0, 0, 0, 0)$.

Deoarece noua soluţie este admisibilă nu reţinem decât valoarea funcţiei obiectiv:

$$g(s^3) = g(s^2) + c_1 = 11 - 2 = 9.\text{ Actualizăm: } x_{\text{CMB}} \leftarrow s^3 \;;\; z_{\text{CMB}} \leftarrow 9$$

ITERAŢIA 3. *Pasul 1*

Pasul 3 Abandonăm s^3 (şi toţi descendenţii săi) şi ne întoarcem în predecesorul s^2. Deoarece z_{CMB} s-a schimbat este necesar să vedem dacă direcţiile din $R(s^2) = \{3, 4\}$ mai rămân recomandabile:

$j = 3 \quad g(s^2) + c_3 = 11 - 5 = 6 < 9 = z_{\text{CMB}} \Rightarrow$ direcţia 3 nu mai este bună, o vom transfera din $R(s^2)$ în $K(s^2)$.

$j = 4 \quad g(s^2) + c_4 = 11 - 1 = 10 > 9 = z_{\text{CMB}} \Rightarrow$ direcţia 4 rămâne recomandabilă

Deci $I(s^2) = \{2\}$, $J(s^2) = \{1\}$; $L(s^2) = \{5, 6\}$, $K(s^2) = \{3\}$ deci $R(s^2) = \{4\}$

Pasul 2 Testul (*) se reduce la inegalitatea

$i = 1 \quad e_1(s^2) = -1 < 0;\; (a_{14})^- \leq e_1(s^2) \Leftrightarrow -2 \leq -1$ (A)

şi este trecut.

Având un singur succesor recomandabil şi anume $w = s^2\ (x_4 \leftarrow 1)$ înaintăm din s^2 pe direcţia $k = 4$ către $w = (0, 1, 0, 1, 0, 0)$.

Actualizăm:

$J(s^2) = \{1, 4\}$; $R(s^2) = \varnothing$ (la revenirea in s^2 nu vom mai avea nici o direcţie de urmat)

Soluţia curentă (a 4-a soluţie generată) $s^4 = (0, 1, 0, 1, 0, 0)$.

Reţinem: - ecartul noii soluţii $e(s^4) = e(s^2) - A^4 = (1, -3, 11)$

- valoarea funcţiei obiectiv: $g(s^4) = g(s^2) + c_4 = 11 - 1 = 10$

ITERAŢIA 4. *Pasul 1*

- s^4 nu este o soluţie admisibilă; înscriem ecartul ei în tabel;

$I(s^4) = \{2, 4\}$, $J(s^4) = \varnothing$; $L(s^4) = \{5, 6\}$, $K(s^2) = \{1, 3\}$ deci $R(s^2) = \varnothing$

Pasul 3 Neavând nici o direcţie recomandabilă ne întoarcem în predecesorul s^2.

Pasul 2 Constatăm că $R(s^2) = \varnothing$

Pasul 3 Mai facem o mişcare „înapoi" în predecesorul s^1.

De la părăsirea lui s^1, z_{CMB} s-a schimbat. Acum că am revenit în s^1 este cazul să vedem dacă direcţiile din $R(s^1) = \{1, 3, 4, 5\}$ mai rămân recomandabile:

$j = 1 \quad g(s^1) + c_1 = 14 - 2 = 12 > 9 = z_{\text{CMB}}$

$j = 3 \quad g(s^1) + c_3 = 14 - 5 = 9 = z_{\text{CMB}} \Rightarrow$ mutăm direcţia 3 din $R(s^1)$ în $L(s^1)$

$j = 4 \quad g(s^1) + c_4 = 14 - 1 = 13 > 9 = z_{\text{CMB}}$

$j = 5 \quad g(s^1) + c_5 = 14 - 6 = 8 < 9 = z_{\text{CMB}} \Rightarrow$ mutăm direcţia 5 din $R(s^1)$ în $L(s^1)$.

Deci $R(s^1) = \{1, 4\}$

Pasul 2 Construim inegalitățile (*)

$i = 1 \quad e_1(s^1) = -3 < 0; \quad \sum_{j\in R(s)} (a_{1j})^- \leq e_1(s^1) \Leftrightarrow (-3) + (-2) \leq -3$ (A)

$i = 2 \quad e_2(s^1) = -1 < 0; \quad \sum_{j\in R(s)} (a_{2j})^- \leq e_2(s^1) \Leftrightarrow 0 + 0 \leq -1$ (F)

Testul nu este trecut.

Pasul 3 Abandonăm s^1 şi cum $s^1 = \theta$ algoritmul se opreşte.

Soluția optimă a problemei modificate (PB) este $v^* = x_{CMB} = s^3 = (1, 1, 0, 0, 0, 0)$; $g(v^*) = 9$.

Substituind $x_2 \leftarrow 1 - x_2$; $x_3 \leftarrow 1 - x_3$; $x_5 \leftarrow 1 - x_5$ obținem soluția problemei originale (P): $x^* = (1, 0, 1, 0, 1, 0)$; $f(v^*) = -9$

Evoluția arborelui soluțiilor examinate T este indicată în figura 1.

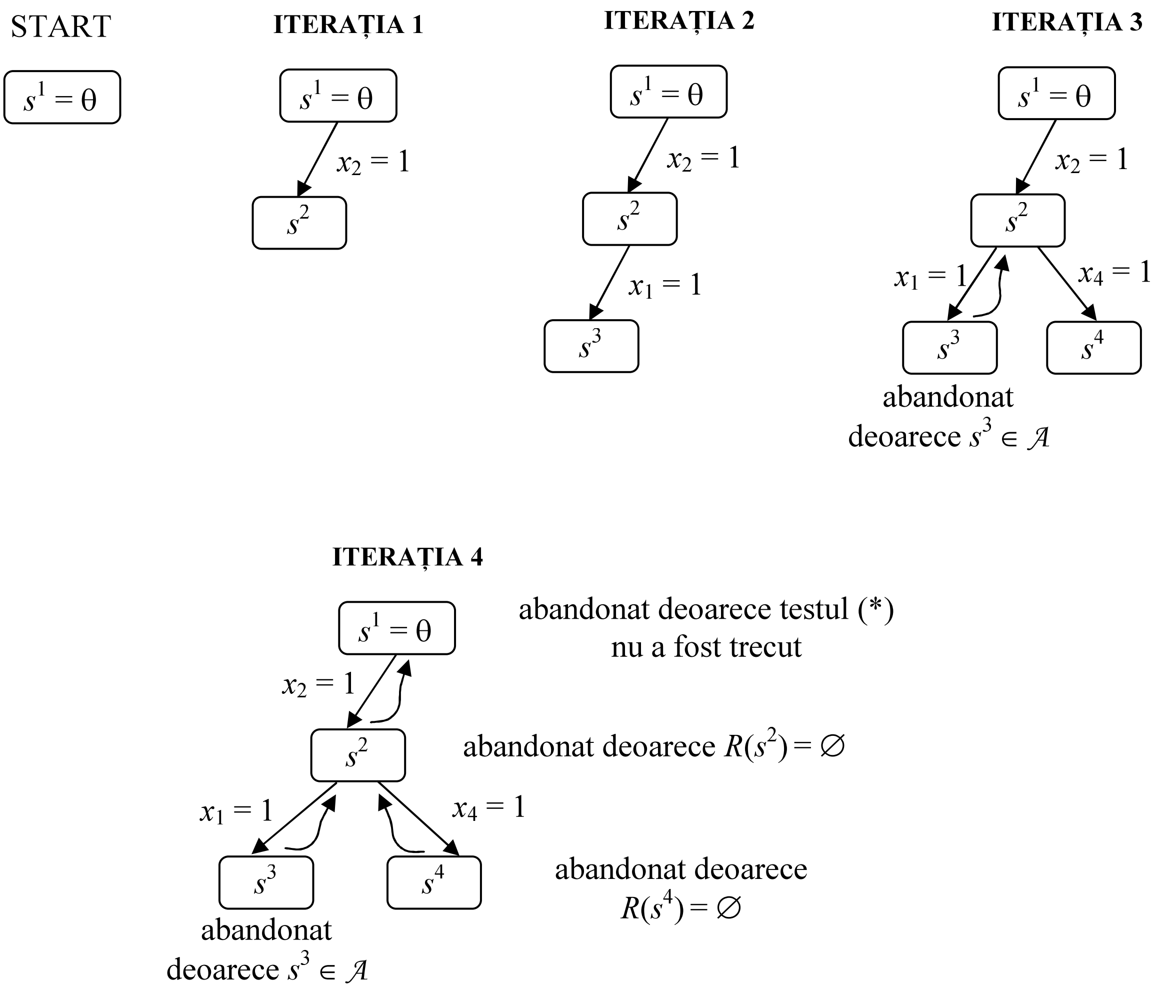

Figura 1

Din cele $2^6 = 64$ de soluții au fost examinate doar 4 reprezentând 6,25% din Ω.

Exemplul 2 (Problema Balaş). Considerăm problema de programare bivalentă:

$$(P)\begin{cases}(\min) f = -5x_1 + 7x_2 + 10x_3 - 3x_4 + x_5 \\ -x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 - 4x_5 \geq 0 \\ -2x_1 - 6x_2 + x_3 - 2x_4 - 2x_5 \leq -4 \\ \qquad -x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 \geq 2 \\ x_1,\ldots,x_5 \in \{0,1\}\end{cases}$$

Pregătirea problemei. Aducem problema la forma (1) cu satisfacerea ipotezei (7):

- maximizăm $g(x) = -\ f(x) = 5x_1 - 7x_2 - 10x_3 + 3x_4 - x_5$
- efectuăm substituțiile: $x_1 \leftarrow 1 - x_1,\ x_4 \leftarrow 1 - x_4,$

Rezultă problema:

$$(PB)\begin{cases}(\max) g = 8 - 5x_1 - 7x_2 - 10x_3 - 3x_4 - x_5 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 - x_4 + 4x_5 \leq -2 \\ 2x_1 - 6x_2 + x_3 + 2x_4 - 2x_5 \leq 0 \\ \qquad x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 \leq -1 \\ x_1,\ldots,x_5 \in \{0,1\}\end{cases}$$

Punem în evidență matricea A şi vectorul c al coeficienților funcției obiectiv; în dreapta acestei matrici vor fi trecute progresiv ecarturile acelor combinații din Ω care nu sunt soluții admisibile.

c	-5	-7	-10	-3	-1
	A^1	A^2	A^3	A^4	A^5
	-1	3	-5	-1	4
	2	-6	3	2	-2
	0	1	-2	1	1

Determinați soluția optima a problemei ştiind ca graful soluțiilor efectiv generate este cel din figura 2.

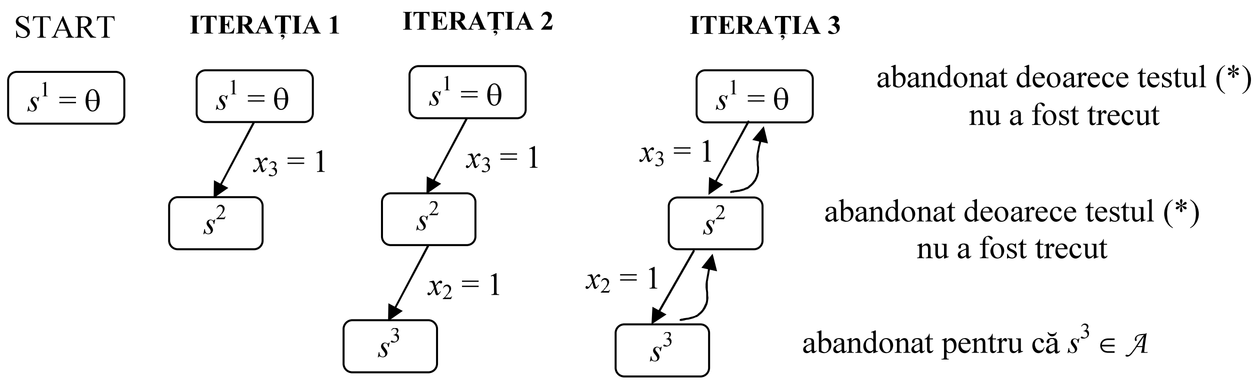

Figura 2

Din cele $2^5 = 32$ de soluții au fost examinate doar 3 reprezentând 9,38% din Ω.