E.1 Se consideră programul liniar în numere întregi:

$$(P)\begin{cases}(\max)f = 2x_1 + x_2\\ x_1 + x_2 \le 5\\ -x_1 + x_2 \le 0\\ 6x_1 + 2x_2 \le 21\\ x_1, x_2 \ge 0, \text{ intregi}\end{cases}$$

1) Să se reprezinte grafic mulţimea A_{PL} a soluţiilor admisibile ale problemei relaxate (PL). Să se pună în evidenţă soluţiile admisibile întregi ale programului (P).

2) Să se pună în evidenţă acoperirea convexă a mulţimii soluţiilor admisibile întregi. Scrieţi acoperirea ca mulţime de soluţii ale unui sistem de inecuaţii liniare.

3) Să se determine grafic soluţia optimă fracţionară x^* şi soluţia optimă întreagă x^0.

Soluţie:

În figura 3.1 mulţimea soluţiilor admisibile ale relaxatei (PL) este mulţimea simplu haşurată.

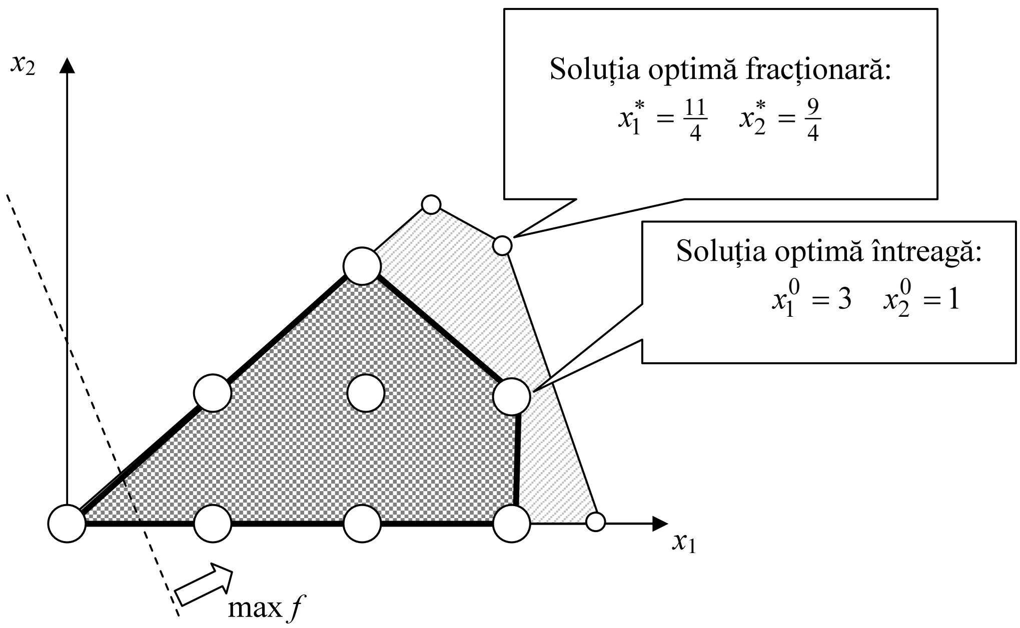

Figura 3.1

Soluţiile admisibile întregi sunt reprezentate prin discurile albe mai mari (discurile mici sunt vârfuri ale mulţimii A_{PL}). Acoperirea convexă a acestora, adică cea mai mică mulţime convexă care le conţine, este mulţimea dublu haşurată. Se vede că acoperirea poate fi descrisă prin sistemul de inecuaţii:

$$\begin{cases}-x_1 + x_2 \le 0\\ x_1 + x_2 \le 4\\ x_1 \le 3\\ x_1, x_2 \ge 0\end{cases}$$

E.2 Răspundeţi întrebărilor de la E.1 pentru programul:

$$(P)\begin{cases}(\max)f = 3x_1 - x_2 \\ 3x_1 - 2x_2 \le 3 \\ 5x_1 + 4x_2 \ge 10 \\ 2x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{ intregi}\end{cases}$$

E.3 Un agricultor are nevoie de 107 funţi (un funt ≡ pound = 0.453 kg) de îngrăşământ pentru fertilizarea unei parcele de livadă.El poate cumpăra îngrăşământul fie în saci de 35 de funţi la preţul de 14$ sacul fie în saci de 24 funţi cu 12$ sacul. Obiectivul său este de a cumpăra îngrăşământul necesar la cel mai mic cost.

1) Scrieţi programul în numere întregi care modelează situaţia dată.

2) Omiteţi condiţia de integritate impusă variabilelor şi încercaţi să rezolvaţi problema relaxată fără a folosi algoritmul simplex.

3) Determinaţi o soluţie acceptabilă a modelului în numere întregi prin rotunjirea convenabilă a soluţiei optime fracţionare.

4) Determinaţi pe cale grafică soluţia optimă întreagă; comparaţi această soluţie cu cea rezultată din rotunjire.

Soluţie:

1) Modelul matematic:

$$\begin{cases}(\min)f = 14x_1 + 12x_2 \\ 35x_1 + 24x_2 \ge 107 \\ x_1, x_2 \ge 0 \text{, intregi}\end{cases}$$

unde x_1 şi x_2 reprezintă numărul sacilor de 35 funţi respectiv de 24 funţi ce urmează a fi cumpăraţi.

2) Problema relaxată are o singură restricţie şi ca urmare poate fi rezolvată foarte simplu:

- un funt de îngrăşământ din sacul de 35 funţi costă $\frac{14}{35} = 0.4\$$
- un funt de îngrăşământ din sacul de 24 funţi costă $\frac{12}{24} = 0.5\$$

Deci îngrăşământul din sacul de 35 funţi este mai ieftin şi dacă există posibilitatea vânzării "la kg" atunci fermierul va cumpăra $\frac{107}{35} = 3\frac{2}{35}$ saci de 35 funţi adică trei saci întregi şi doi funţi îngrăşământ "vărsat". Valoarea cumpărăturii va fi de $107 \times 0.4 = 42.8\$$.

Prin urmare, soluţia optimă a relaxatei va fi:

$$x_1^* = 3\frac{2}{35} \quad x_2^* = 0 \quad f(x^*) = 42.8$$

3) Două rotunjiri sunt posibile, ambele conducând la soluţii întregi, admisibile:

$x_1' = 4 \quad x_2' = 0 \quad f(x') = 56\$$ pentru 4 × 35 = 140 funți de îngrășământ;

$x_1'' = 3 \quad x_2'' = 1 \quad f(x'') = 54\$$ pentru 3 × 35 + 1 × 24 = 129 funți de îngrășământ.

Ambele soluții sunt însă "departe" de soluția optimă întreagă:

$x_1^0 = 1 \quad x_2^0 = 3 \quad f(x^0) = 50\$$ pentru 1 × 35 + 3 × 24 = 107 funți de îngrășământ (vezi figura 3.2).

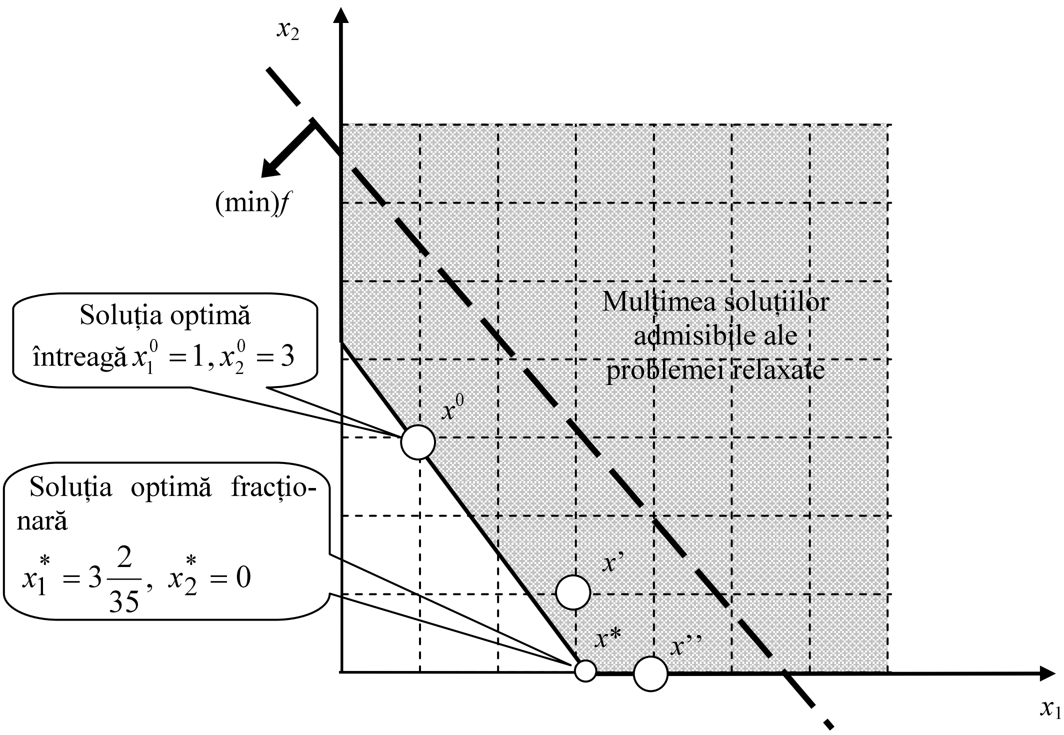

Figura 3.2