E.1 a) Să se rezolve programul întreg :

$$(P)\begin{cases}(\max) f = 2x_1 + x_2 \\ x_1 + \ x_2 \le \ 5 \\ -x_1 + \ x_2 \le \ 0 \\ 6x_1 + 2x_2 \le 21 \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{ intregi}\end{cases}$$

cu algoritmul Gomory

b) Să se exprime tăieturile generate cu ajutorul variabilelor originale x_1 şi x_2 şi să se vizualizeze efectul introducerii lor;

Soluție:

a) TEMA

b) Tăieturile:

$$t_1 : \quad x_1 \le 3$$
$$t_2 : \ 3x_1 + x_2 \le 10$$
$$t_3 : \ 2x_1 + x_2 \le 7$$

Efectul introducerii succesive a celor trei restricții suplimentare este vizualizat în figura 6.1.

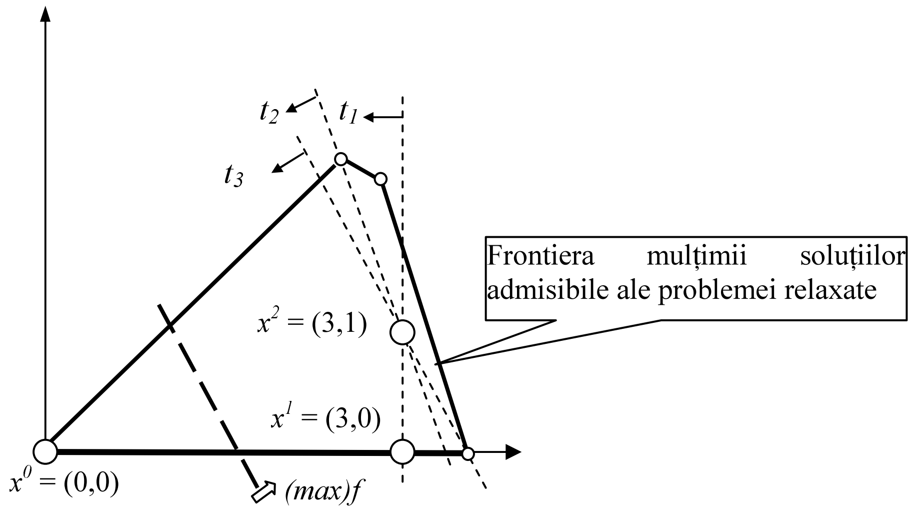

Figura 6.1

E.3 Să se rezolve programul întreg :

$$(P)\begin{cases}(\max) f = 10x_1 + 3x_2 \\ 6x_1 + 7x_2 \le 40 \\ 3x_1 + \ x_2 \le 11 \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{intregi}\end{cases}$$

a) cu algoritmul Gomory şi b) grafic.

Soluție: b)

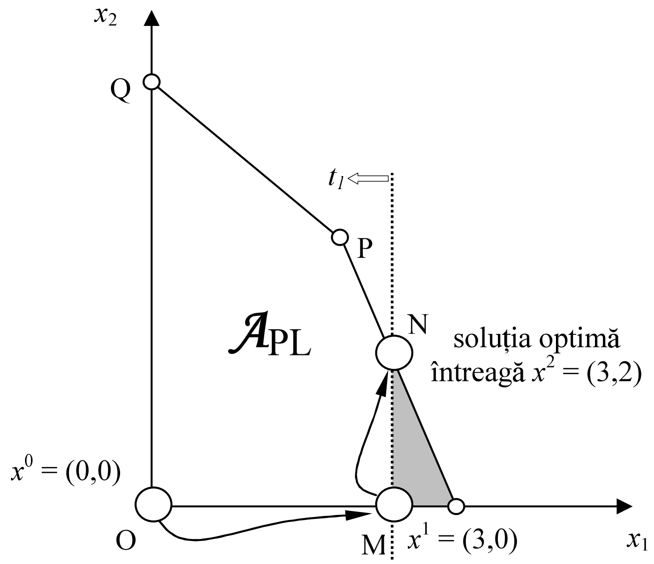

Figura 6.2

E.4 Să se rezolve cu ajutorul algoritmului Gomory programele întregi:

$$a)\begin{cases}(\max)f = 3x_1 + x_2\\ 2x_1 + 3x_2 \le 6\\ 2x_1 - 3x_2 \le 3\\ x_1, x_2 \ge 0 \text{ intregi}\end{cases} \qquad b)\begin{cases}(\max)f = x_1 + x_2 + x_3\\ -4x_1 + 5x_2 + 2x_3 \le 4\\ -2x_1 + 5x_2 \le 5\\ -3x_1 - 2x_2 + 2x_3 \le 6\\ 2x_1 - 5x_2 \le 1\\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \text{ intregi}\end{cases}$$

E.6 Un program întreg este rezolvat cu algoritmul Gomory. La o anumită iterație restricția generatoare a fost:

$$x_6 - \frac{31}{7}x_1 + \frac{17}{7}x_2 - \frac{2}{7}x_3 + \frac{1}{7}x_4 + 2x_5 = \frac{44}{7}$$

Derivați tăietura corespunzătoare.

Soluție:

- Punem în evidență părțile întregi şi cele fracționare ale coeficienților restricției generatoare:

$$x_6 + (-5 + \frac{4}{7})x_1 + (2 + \frac{3}{7})x_2 + (-1 + \frac{5}{7})x_3 + (0 + \frac{1}{7})x_4 + 2x_5 = 6 + \frac{2}{7}$$

- Rescriem ultima relație în forma:

$$\frac{4}{7}x_1 + \frac{3}{7}x_2 + \frac{5}{7}x_3 + \frac{1}{7}x_4 - \frac{2}{7} = 6 - x_6 + 5x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_5$$

- Tăietura căutată are expresia:

$$\frac{4}{7}x_1 + \frac{3}{7}x_2 + \frac{5}{7}x_3 + \frac{1}{7}x_4 - \frac{2}{7} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4}{7}x_1 + \frac{3}{7}x_2 + \frac{5}{7}x_3 + \frac{1}{7}x_4 \geq \frac{2}{7}$$

După introducerea unei variabile de abatere *y*, tăietura, devenită egalitate, se adaugă la programul liniar curent sub forma:

$$-\frac{4}{7}x_1 - \frac{3}{7}x_2 - \frac{5}{7}x_3 - \frac{1}{7}x_4 + y = -\frac{2}{7}$$

şi în continuare se aplică algoritmul simplex dual.

E.7 a) Să se determine soluția optimă a programului întreg:

$$(P)\begin{cases} (\max) f = x_1 + x_2 \\ 4x_1 - 3x_2 \geq 4 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 10 \\ 4x_1 - x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \ \text{intregi} \end{cases}$$

utilizând algoritmul de tip dual B (algoritmul ciclic al lui Gomory);

b) Să se arate că inegalitatea $t_2 : \frac{1}{5}x_4 + \frac{3}{5}x_6 \geq \frac{1}{5}$ obținută în iterația 2 este o tăietură;

c) Să se exprime tăieturile generate în funcție de variabilele originale x_1 , x_2 şi să se vizualizeze efectul introducerii lor.

Soluție:

a) Notăm cu (P) şi forma standard a programului dat:

$$(P)\begin{cases} (\max) f = x_1 + x_2 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_4 = 10 \\ 4x_1 - x_2 + x_5 = 10 \\ x_j \geq 0 \ \textit{intregi} \ j = 1,\dots,5 \end{cases}$$

Rezolvând relaxata (PL) cu algoritmul simplex obținem soluția optimă fracționară:

$$x_1 = \frac{30}{11} = 2\frac{8}{11},\ x_2 = \frac{10}{11} \quad (\max) f = \frac{40}{11} = 3\frac{7}{11}$$

Din acest moment începe aplicarea propriu zisă a algoritmului Gomory. Ca restricție generatoare se va alege prima ecuație cu termen liber neîntreg din forma secundară curentă. Continuați aplicarea algoritmului.

b) Probăm mai întâi că orice soluție admisibilă întreagă a problemei (P) verifică inegalitatea t_2. Să presupunem prin absurd că ar exista o soluție $\bar{x} = (\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_5)$ care nu satisface t_2. Am avea atunci:

$$\frac{1}{5}\bar{x} + \frac{3}{5}\bar{x} < \frac{1}{5} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\bar{x} - \frac{3}{5}\bar{x} > 0 \ \text{ cu } \bar{x}_6 = -\frac{8}{11} + \frac{1}{22}\bar{x}_4 + \frac{5}{22}\bar{x}_5 = 2 - \bar{x}_1 = \text{număr întreg!}$$

Din modul în care s-a dedus tăietura t_2 rezultă relația:

$$\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\bar{x}_4-\frac{3}{5}\bar{x}_6=1-\bar{x}\quad+\bar{x}_6 = \text{număr întreg}$$

astfel că, de fapt: $\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\bar{x}_4-\frac{3}{5}\bar{x}_6 \geq 1$! Ar rezulta că: $\frac{1}{5}\bar{x}_4+\frac{3}{5}\bar{x}_6 \leq -\frac{4}{5}<0$. Ultima inegalitate este falsă deoarece membrul stâng este nenegativ!

c) Din (P) extragem expresiile variabilelor de abatere x_4 şi x_5 în funcţie de variabilele originale x_1 şi x_2:

$$x_4=10-2x_1-5x_2 \quad x_5=10-4x_1+x_2$$

pe care le introducem în tăietura t_1. Obţinem inegalitatea echivalentă: $t_1: x_1 \leq 2$.

Din forma standard a tăieturii t_1 rezultă: $\bar{x}_6=-\frac{8}{11}+\frac{1}{22}x_4+\frac{5}{22}x_5=2-x_1$. Înlocuind x_4 şi x_6 în t_2 se găseşte expresia echivalentă: $x_1+x_2 \leq 3$. Efectul introducerii acestor tăieturi este vizualizat în figura 6.3.

Observaţie: Soluţia optimă întreagă este situată în interiorul mulţimii $\mathcal{A}_{PL}$.

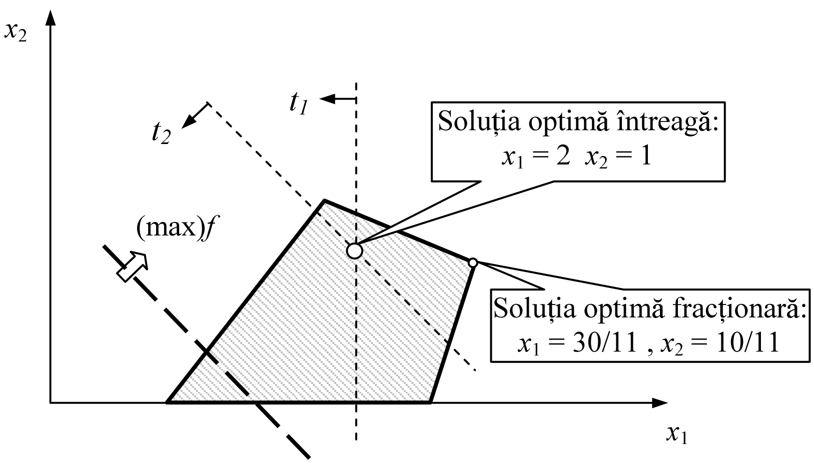

Figura 6.3

E.8 Să se rezolve programul întreg:

$$(P)\begin{cases}(\max)f=10x_1+19x_2\\ 2x_1+3x_2\leq 11\\ x_1\ +5x_2\leq 14\\ 2x_1+\ x_2\ \leq 9\\ x_1\geq 0\ ,\ x_2\geq 0 \text{ intregi}\end{cases}$$

utilizând algoritmul de tip dual Gomory.

Soluţie: $x_1 = 4$, $x_2 = 1$, $f(x) = 59$

Observaţie: Soluţia optimă întreagă se află pe frontiera mulţimii $\mathcal{A}_{PL}$ a soluţiilor admisibile ale problemei relaxate (PL) (vezi soluţia grafică).