8 Distribuţia normală

Distribuţia normală este cea mai importantă distribuţie continuă, deoarece în practică multe variabile aleatoare sunt **variabile aleatoare normale**, sunt aproximativ variabile aleatoare normale, sau pot fi transformate în variabile aleatoare normale.

Definiţia 8.1 ***Distribuţia normală*** *(sau distribuţia Gauss) cu parametrii μ şi σ^2 ($\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$) este distribuţia unei variabile aleatoare X având funcţia de densitate*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{40}$$

Notăm în acest caz $X \in \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ şi spunem că X este o variabilă aleatoare ***normală cu parametrii*** *μ* ***şi*** *σ^2.*

În cazul particular $\mu = 0$ şi $\sigma^2 = 1$ spunem că X este o variabilă aleatoare ***normală standard*** *şi notăm $X \in \mathcal{N}(0, 1)$.*

Observaţia 8.2 *Dacă $X \in \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, atunci au loc următoarele:*

1. *Media şi dispersia variabilei aleatoare X sunt chiar parametrii μ şi σ^2.*
2. *$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$ (constanta $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ în faţa exponenţialei este aleasă astfel încât integrala densităţii să fie egală cu 1).*
3. *Graficul densităţii f este simetric faţă de dreapta $x = \mu$, are un maxim în punctul $x = \mu$ şi puncte de inflexiune în punctele $x = \mu \pm \sigma$ (vezi Figura 6).*
4. *Pentru valori mari ale lui σ, graficul lui f tinde mai repede la 0 atunci când $x \to \pm\infty$.*

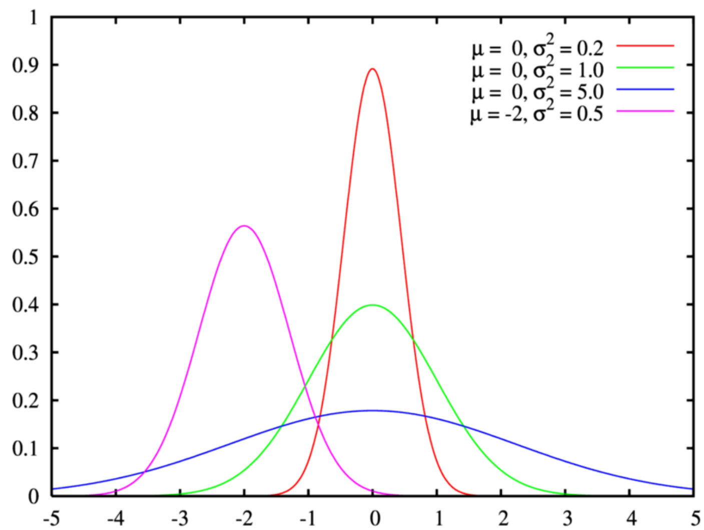

Figure 6: Graficul distribuţiei normale pentru câteva valori ale parametrilor μ şi σ^2.

8.1 Funcţia de distribuţie normală

Reamintim că funcţia de distribuţie a unei variabile aleatoare X a fost definită prin

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\, du, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

În particular, dacă $X \in \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ este o variabilă aleatoare normală cu parametrii μ şi σ^2, atunci funcţia de distribuţie corepunzătoare este dată de

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{41}$$

iar dacă $X \in \mathcal{N}(0,1)$ este o variabilă aleatoare normală standard, atunci funcţia de distribuţie corespunzătoare este

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{42}$$

Ambele integrale din formulele anterioare nu pot fi exprimate prin funcţii elementare. Valorile funcţiei de distribuţie normale standard Φ se pot determina aproximativ din tabele de valori (a se vedea Anexele 1 şi 2). Pentru a putea determina valorile aproximative ale funcţiei de distribuţie F folosim următoarea.

Teorema 8.3 *Legătura dintre funcţia de distribuţie F a unei variabile aleatoare normale cu parametrii μ şi σ^2 şi funcţia de distribuţie normală standard Φ este dată de*

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{43}$$

Demonstraţie. Folosind substituţia $v = \frac{u-\mu}{\sigma}$ în formula (41), obţinem

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{v^2}{2}} \sigma du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{v^2}{2}} du \\ &= \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \end{aligned}$$

conform definiţiei funcţiei Φ (formula (42)). ■

Pentru a determina probabilitatea ca o variabilă aleatoare normală să ia valori într-un anumit interval, folosim următoarea.

Teorema 8.4 *Probabilitatea ca o variabilă aleatoare normală $X \in \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ cu medie μ şi dispersie σ^2 să ia valori într-un interval $(a,b]$ este dată de*

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

Demonstraţie. Conform definiţiei funcţiei de distribuţie F a variabilei aleatoare X avem:

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a).$$

Cea de a doua egalitate din enunţ rezultă din teorema anterioară (deoarece $F(b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$ şi $F(a) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$).
■

8.2 Valori numerice

În practică, folosind tabelele de valori (a se vedea Anexele 1 şi 2), se pot determina valorile aproximative ale diverselor probabilităţi legate de o variabilă aleatoare normală.

Spre exemplu, dacă $X \in \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, conform propoziţiei anterioare (cu $a = \mu - \sigma$ şi $b = \mu + \sigma$) se poate determina

$$\begin{aligned} P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) &= \Phi\left(\frac{(\mu+\sigma)-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{(\mu-\sigma)-\mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi(1) - \Phi(-1) \\ &\approx 0.8413 - (1 - 0.8413) \\ &= 0.6826 \end{aligned}$$

Sunt utile de reţinut următoarele valori aproximative (vezi Figura 7):

$$\begin{aligned} P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) &\approx 68.2\% \\ P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) &\approx 95.4\% \\ P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) &\approx 99.7\% \end{aligned}$$

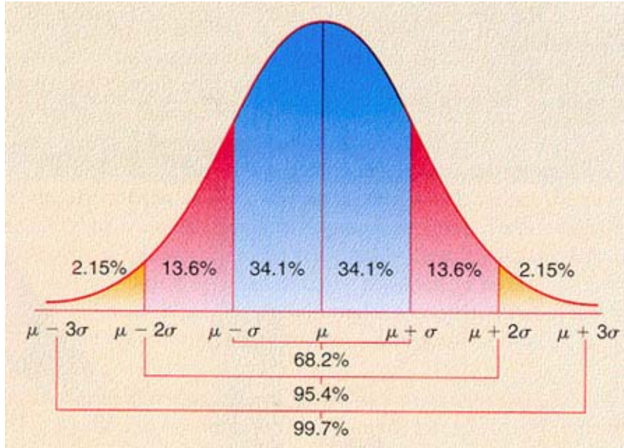

Figure 7: Câteva valori importante ale distribuţiei normale.

Aceste formule arată că probabilitatea ca o variabilă aleatoare $X \in \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ să nu devieze de la media μ cu mai mult de σ, 2σ, respectiv 3σ sunt aproximativ 68%, 95%, respectiv 99%.

Reciproc, în testele statistice din secţiunile următoare, vom fi interesaţi să determinăm intervalele corespunzătoare anumitor probabilităţi date.

Spre exemplu, folosind tabela de valori a funcţiei Φ se pot spre exemplu determina umrătoarele intervale corespunzătoare celor mai frecvente probabilităţi, de 95%, 99%, respectiv 99.9%.

$$\begin{aligned}
P\left(\mu - 1.96\sigma < X \leq \mu + 1.96\sigma\right) &\approx 95\% \\
P\left(\mu - 2.58\sigma < X \leq \mu + 2.58\sigma\right) &\approx 99\% \\
P\left(\mu - 3.29\sigma < X \leq \mu + 3.29\sigma\right) &\approx 99.9\%
\end{aligned}$$

8.3 Utilizarea tabelelor de valori pentru distribuţia normală

În anexe sunt indicate două tabele de valori ce permit:

- determinarea probabilităţilor corespunzătoare unei valori x date (adică a funcţiei Φ, Anexa 1)
- determinarea valorilor x corespunzătoare anumitor probabilităţi date (Anexa 2).

Exemplul 8.5 *Dacă X este o variabilă aleatoare normală standard (adică $X \in \mathcal{N}(0,1)$), să se determine următoarele probabilităţi: $P(X \leq 2.44)$, $P(X \leq -1.16)$, $P(X \geq 1)$, $P(1.0 \leq X \leq 1.8)$.*

Folosind tabela de valori din Anexa 1 avem:

$$\begin{aligned}
P(X \leq 2.44) &= \Phi(2.44) = 0.9927 \\
P(X \leq -1.16) &= \Phi(-1.16) = 1 - \Phi(1.16) = 0.1230 \\
P(X \geq 1) &= 1 - P(X \leq 1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587 \\
P(1.0 \leq X \leq 1.8) &= P(X \leq 1.8) - P(X \leq 1.0) = \Phi(1.8) - \Phi(1.0) = 0.9641 - 0.8413 = 0.1228
\end{aligned}$$

Exemplul 8.6 *Fie X o variabilă aleatoare normală cu medie $\mu = 0.8$ şi dispersie $\sigma^2 = 4$ (şi deci $\sigma = 2$), să se determine probabilităţile $P(X \leq 2.44)$, $P(X \leq -1.16)$, $P(X \geq 1)$ şi $P(1 \leq X \leq 1.8)$.*

Folosind legaătura dintre funcţia de distribuţie F şi funcţia de distribuţie normală standard Φ (relaţia (43)) şi *tabela de valori din Anexa 1 avem:*

$$\begin{aligned}
P(X\leq 2.44) &= F(2.44)=\Phi\left(\frac{2.44-0.8}{2}\right)=\Phi(0.82)=0.7939\\
P(X\leq -1.16) &= F(-1.16)=\Phi\left(\frac{-1.16-0.8}{2}\right)=\Phi(-0.98)=1-\Phi(0.98)=0.1635\\
P(X\geq 1) &= 1-P(X\leq 1)=1-F(1)=1-\Phi\left(\frac{1-0.8}{2}\right)=1-\Phi(0.1)=1-0.5398=0.4602\\
P(1.0\leq X\leq 1.18) &= P(X\leq 1.18)-P(X\leq 1.0)=F(1.18)-F(1.0)=\Phi\left(\frac{1.8-0.8}{2}\right)-\Phi\left(\frac{1.0-0.8}{2}\right)\\
&= \Phi(0.5)-\Phi(0.1)=0.6915-0.5398=0.1517
\end{aligned}$$

Exemplul 8.7 *Fie X o variabilă aleatoare normală cu medie 5 şi dispersie 0.04 (şi deci abaterea pătratică standard este $\sigma=\sqrt{0.04}=0.2$). Să se determine constantele a, b şi c astfel încât $P(X\leq a)=95\%$, $P(5-b\leq X\leq 5+b)=90\%$, respectiv $P(X\geq c)=1\%$.*

Cum $P(X\leq a)=0.95$, avem echivalent $F(a)=0.95$ sau folosind relaţia (43) $\Phi\left(\frac{a-5}{0.2}\right)=0.95$. Din tabela de valori din Anexa 2 determinăm $\frac{a-5}{0.2}=1.645$, şi deci $a=5.329$.

Similar, avem

$$0.90=P(5-b\leq X\leq 5+b)=F(5+b)-F(5-b)=\Phi\left(\frac{(5+b)-5}{0.2}\right)-\Phi\left(\frac{(5+b)-5}{0.2}\right)=\Phi\left(\frac{b}{0.2}\right)-\Phi\left(-\frac{b}{0.2}\right).$$

Din Anexa 2 determinăm $\frac{b}{0.2}=1.645$, şi deci $b=0.329$.

Cum $P(X\geq c)=0.01$, avem echivalent $P(X\leq c)=1-0.01=0.99$, şi deci $F(c)=0.99$ sau $\Phi\left(\frac{c-5}{0.2}\right)=0.99$. Din Anexa 2 determinăm $\frac{c-5}{0.2}=2.326$, şi deci $c=5.4652$.

Exemplul 8.8 *Presupunem că diametrul barelor produse de un anumit producător este o variabilă aleatoare x cu medie 2 cm şi abatere pătratică medie 0.008 cm (deci $\sigma=0.008$).*

a) Care este procentul de piese defecte dacă toleranţa maximă admisă este 2 ± 0.02 cm?

b) Cum trebuie ales intervalul de toleranţă pentru ca 4% din piese să fie defecte?

Pentru a calcula procentul (probabilitatea) cerută, calculăm mai întâi probabilitatea evenimentului contrar (a pieselor fără defecţiuni):

$$P(2-0.02\leq X\leq 2+0.02)=\Phi\left(\frac{2.02-2}{0.008}\right)-\Phi\left(\frac{2.02-2}{0.008}\right)=\Phi(2.5)-\Phi(-2.5)=0.9938-(1-0.9938)=0.9876.$$

Procentul pieselor cu defecţiuni este deci $1-0.9876=0.0124$.

Să determinăm constanta c astfel încât procentul pieselor fără defecţiuni este $1-4\%=0.96$, adică

$$P(2-c\leq X\leq 2+c)=0.96.$$

Avem echivalent

$$0.96=\Phi\left(\frac{(2+c)-2}{0.008}\right)-\Phi\left(\frac{(2-c)+2}{0.008}\right)=\Phi\left(\frac{c}{0.008}\right)-\Phi\left(-\frac{c}{0.008}\right),$$

şi folosind Anexa 2 obţinem $\frac{c}{0.008}=2.054$, de unde $c=0.0164$.

Pentru a avea un procent de 4% piese defecte, toleranţa trebuie aleasă 2 ± 0.0164.

8.4 Aproximarea normală a distribuţiei binomiale

În secţiunea anterioară am văzut că variabila aleatoare normală binomială $X\in Bin(n,p)$ cu parametrii n şi p poate fi aproximată prin variabila aleatoare Poisson $Y\in Poisson(\mu)$, relaţia de legătură între parametrii fiind $\mu=np$.

Următoarea teoremă fundamentală a teoriei probabilităţilor arată că putem de asemenea aproxima variabila aleatoare binomială $X\in Bin(n,p)$ prin variabila aleatoare normală $Z\in N(\mu,\sigma^2)$, relaţiile de legătură între parametrii fiind în acest caz $\mu=np$ şi $\sigma^2=npq$.

Teorema 8.9 (Teorema limită de Moivre-Laplace) *Pnetru valori mari ale lui n, variabila aleatoare binomială $X \in Bin(n,p)$ cu parametrii n şi p poate fi aproximată prin variabila aleatoare normală $Z \in \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$, relaţiile de legătură între parametrii fiind*

$$\mu = np \qquad \text{şi} \qquad \sigma^2 = npq.$$

Aceasta înseamnă spre exemplu că putem aproxima funcţia de probabilitate f a variabilei aleatoare X prin

$$f(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(x-np)^2}{2npq}}, \qquad x \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$$

sau probabilitatea ca X să ia valori între a şi b prin

$$P(a \leq X \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Exerciţii

Exerciţiul 8.1 *Fie X o variabilă aleatoare cu medie 10 şi dispersie 4. Să se determine următoarele probabilităţi: $P(X > 12)$, $P(X < 10)$, $P(X < 11)$ şi $P(9 < X < 13)$.*

Exerciţiul 8.2 *Fie X o variabilă aleatoare cu medie 105 şi dispersie 25. Să se determine următoarele probabilităţi: $P(X \leq 112.5)$, $P(X > 100)$ şi $P(110.5 < X < 111.25)$.*

Exerciţiul 8.3 *Fie X o variabilă aleatoare cu medie 50 şi dispersie 9. Să se determine valoarea constantei c astfel încât $P(X < c) = 5\%$, $P(X > c) = 1\%$ şi $P(50 - c < X < 50 + c) = 50\%$.*

Exerciţiul 8.4 *Fie X o variabilă aleatoare cu medie 3.6 şi dispersie 0.01. Să se determine valoarea constantei c astfel încât $P(X \leq c) = 50\%$, $P(X > c) = 10\%$ şi $P(-c < X - 3.6 < c) = 99.9\%$.*

Exerciţiul 8.5 *Dacă durata de viaţă a unei baterii este o variabilă aleatoare normală cu medie 5 ani şi abatere pătratică medie 1 an, şi producătorul doreşte ca să garanteze bateria pentru 4 ani, ce procent de baterii vor trebui schimbate pe parcursul garanţiei?*

Exerciţiul 8.6 *Dacă abaterea pătratică medie ar fi mai mică, procentul de baterii ce trebuiesc schimbate ar fi mai mare sau mai mic? Verificaţi răspunsul pentru o anumită valoare a abaterii pătratice medii mai mici decât 1.*

Exerciţiul 8.7 *Dacă rezistenţa unor cabluri electrice dintr-o anumită reţea electrică este o variabilă aleatoare cu medie 0.01 ohmi şi abatere pătratică medie 0.001 ohmi, câte din cele 1000 de cabluri electrice vor îndeplini specificaţiile tehnice de a avea o rezistenţă între 0.009 şi 0.011 ohmi?*

Exerciţiul 8.8 *Care este probabilitatea de a obţine cel puţin 2048 feţe stemă la 4040 aruncări ale unei monede?*
Indicaţie: *se va folosi aproximarea normală a variabilei aleatoare binomiale.*

Exerciţiul 8.9 *Dacă notele obţinute de studenţi la un anumit test sunt normale cu medie 48 şi abatere pătratică medie 10, şi dacă nota minimă de trecere este 50, ce procent de studenţi vor trece testul?*

Exerciţiul 8.10 *Un producător vinde becuri în pachete de 1000 bucăţi. Folosind aproximarea normală a variabilei aleatoare binomiale, să se determine probabilitatea ca un pachet conţine nu mai mult de 1% becuri defecte, presupunând că un bec produs este defect cu probabilitate $p = 1\%$.*

Exerciţiul 8.11 *Costurile lunare de întreţinere şi reparaţii a unei maşini sunt o variabilă aleatoare normală X cu medie 12000 lei şi abatere pătratică medie 2000 lei. Care este probabilitatea ca în luna următoare aceste costuri să depăşească bugetul alocat de 15000 lei?*

Exerciţiul 8.12 *Rezistenţa X la rupere a unui fir (în kg) este o variabilă aleatoare medie 1500 kg şi abatere pătratică medie de 50 kg. Care este încărcarea maximă a unui astfel de tip de fir, dacă dorim ca nu mai mult de 5% din fire să se rupă?*

Exerciţiul 8.13 *Durata concediului pe caz de boală a angajaţilor unei anumite firme în decurs de o lună este o variabilă aleatoare cu medie 1000 ore şi abatere pătratică medie 100 ore. Ce durată t de concediu pe caz de boală trebuie planificată pentru luna următoare, dacă se doreşte ca probabilitatea ca durata concediului pe caz de boală în această lună să depăşească pe t cu probabilitate de 20%?*

Anexa 1: Tabelă de valori a funcţiei de distribuţie normală standard

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.01	0.5040	0.51	0.6950	1.01	0.8438	1.51	0.9345	2.01	0.9778	2.51	0.9940
0.02	0.5080	0.52	0.6985	1.02	0.8461	1.52	0.9357	2.02	0.9783	2.52	0.9941
0.03	0.5120	0.53	0.7019	1.03	0.8485	1.53	0.9370	2.03	0.9788	2.53	0.9943
0.04	0.5160	0.54	0.7054	1.04	0.8508	1.54	0.9382	2.04	0.9793	2.54	0.9945
0.05	0.5199	0.55	0.7088	1.05	0.8531	1.55	0.9394	2.05	0.9798	2.55	0.9946
0.06	0.5239	0.56	0.7123	1.06	0.8554	1.56	0.9406	2.06	0.9803	2.56	0.9948
0.07	0.5279	0.57	0.7157	1.07	0.8577	1.57	0.9418	2.07	0.9808	2.57	0.9949
0.08	0.5319	0.58	0.7190	1.08	0.8599	1.58	0.9429	2.08	0.9812	2.58	0.9951
0.09	0.5359	0.59	0.7224	1.09	0.8621	1.59	0.9441	2.09	0.9817	2.59	0.9952
0.10	0.5398	0.60	0.7257	1.1	0.8643	1.60	0.9452	2.10	0.9821	2.60	0.9953
0.11	0.5438	0.61	0.7291	1.11	0.8665	1.61	0.9463	2.11	0.9826	2.61	0.9955
0.12	0.5478	0.62	0.7324	1.12	0.8686	1.62	0.9474	2.12	0.9830	2.62	0.9956
0.13	0.5517	0.63	0.7357	1.13	0.8708	1.63	0.9484	2.13	0.9834	2.63	0.9957
0.14	0.5557	0.64	0.7389	1.14	0.8729	1.64	0.9495	2.14	0.9838	2.64	0.9959
0.15	0.5596	0.65	0.7422	1.15	0.8749	1.65	0.9505	2.15	0.9842	2.65	0.9960
0.16	0.5636	0.66	0.7454	1.16	0.8770	1.66	0.9515	2.16	0.9846	2.66	0.9961
0.17	0.5675	0.67	0.7486	1.17	0.8790	1.67	0.9525	2.17	0.9850	2.67	0.9962
0.18	0.5714	0.68	0.7517	1.18	0.8810	1.68	0.9535	2.18	0.9854	2.68	0.9963
0.19	0.5753	0.69	0.7549	1.19	0.8830	1.69	0.9545	2.19	0.9857	2.69	0.9964
0.20	0.5793	0.70	0.7580	1.2	0.8849	1.70	0.9554	2.20	0.9861	2.70	0.9965
0.21	0.5832	0.71	0.7611	1.21	0.8869	1.71	0.9564	2.21	0.9864	2.71	0.9966
0.22	0.5871	0.72	0.7642	1.22	0.8888	1.72	0.9573	2.22	0.9868	2.72	0.9967
0.23	0.5910	0.73	0.7673	1.23	0.8907	1.73	0.9582	2.23	0.9871	2.73	0.9968
0.24	0.5948	0.74	0.7704	1.24	0.8925	1.74	0.9591	2.24	0.9875	2.74	0.9969
0.25	0.5987	0.75	0.7734	1.25	0.8944	1.75	0.9599	2.25	0.9878	2.75	0.9970
0.26	0.6026	0.76	0.7764	1.26	0.8962	1.76	0.9608	2.26	0.9881	2.76	0.9971
0.27	0.6064	0.77	0.7794	1.27	0.8980	1.77	0.9616	2.27	0.9884	2.77	0.9972
0.28	0.6103	0.78	0.7823	1.28	0.8997	1.78	0.9625	2.28	0.9887	2.78	0.9973
0.29	0.6141	0.79	0.7852	1.29	0.9015	1.79	0.9633	2.29	0.9890	2.79	0.9974
0.30	0.6179	0.80	0.7881	1.3	0.9032	1.80	0.9641	2.30	0.9893	2.80	0.9974
0.31	0.6217	0.81	0.7910	1.31	0.9049	1.81	0.9649	2.31	0.9896	2.81	0.9975
0.32	0.6255	0.82	0.7939	1.32	0.9066	1.82	0.9656	2.32	0.9898	2.82	0.9976
0.33	0.6293	0.83	0.7967	1.33	0.9082	1.83	0.9664	2.33	0.9901	2.83	0.9977
0.34	0.6331	0.84	0.7995	1.34	0.9099	1.84	0.9671	2.34	0.9904	2.84	0.9977
0.35	0.6368	0.85	0.8023	1.35	0.9115	1.85	0.9678	2.35	0.9906	2.85	0.9978
0.36	0.6406	0.86	0.8051	1.36	0.9131	1.86	0.9686	2.36	0.9909	2.86	0.9979
0.37	0.6443	0.87	0.8078	1.37	0.9147	1.87	0.9693	2.37	0.9911	2.87	0.9979
0.38	0.6480	0.88	0.8106	1.38	0.9162	1.88	0.9699	2.38	0.9913	2.88	0.9980
0.39	0.6517	0.89	0.8133	1.39	0.9177	1.89	0.9706	2.39	0.9916	2.89	0.9981
0.40	0.6554	0.90	0.8159	1.4	0.9192	1.90	0.9713	2.40	0.9918	2.90	0.9981
0.41	0.6591	0.91	0.8186	1.41	0.9207	1.91	0.9719	2.41	0.9920	2.91	0.9982
0.42	0.6628	0.92	0.8212	1.42	0.9222	1.92	0.9726	2.42	0.9922	2.92	0.9982
0.43	0.6664	0.93	0.8238	1.43	0.9236	1.93	0.9732	2.43	0.9925	2.93	0.9983
0.44	0.6700	0.94	0.8264	1.44	0.9251	1.94	0.9738	2.44	0.9927	2.94	0.9984
0.45	0.6736	0.95	0.8289	1.45	0.9265	1.95	0.9744	2.45	0.9929	2.95	0.9984
0.46	0.6772	0.96	0.8315	1.46	0.9279	1.96	0.9750	2.46	0.9931	2.96	0.9985
0.47	0.6808	0.97	0.8340	1.47	0.9292	1.97	0.9756	2.47	0.9932	2.97	0.9985
0.48	0.6844	0.98	0.8365	1.48	0.9306	1.98	0.9761	2.48	0.9934	2.98	0.9986
0.49	0.6879	0.99	0.8389	1.49	0.9319	1.99	0.9767	2.49	0.9936	2.99	0.9986
0.50	0.6915	1.00	0.8413	1.5	0.9332	2.00	0.9772	2.50	0.9938	3.00	0.9987

Anexa 2: tabelă de valori inverse ale distribuţiei normale

p	$x:\Phi(x)=p$	$x:\Phi(x)-\Phi(-x)=p$	p	$x:\Phi(x)=p$	$x:\Phi(x)-\Phi(-x)=p$	p	$x:\Phi(x)=p$	$x:\Phi(x)-\Phi(-x)=p$
0.01	-2.326	0.013	0.41	-0.228	0.539	0.81	0.878	1.311
0.02	-2.054	0.025	0.42	-0.202	0.553	0.82	0.915	1.341
0.03	-1.881	0.038	0.43	-0.176	0.568	0.83	0.954	1.372
0.04	-1.751	0.050	0.44	-0.151	0.583	0.84	0.994	1.405
0.05	-1.645	0.063	0.45	-0.126	0.598	0.85	1.036	1.440
0.06	-1.555	0.075	0.46	-0.100	0.613	0.86	1.080	1.476
0.07	-1.476	0.088	0.47	-0.075	0.628	0.87	1.126	1.514
0.08	-1.405	0.100	0.48	-0.050	0.643	0.88	1.175	1.555
0.09	-1.341	0.113	0.49	-0.025	0.659	0.89	1.227	1.598
0.10	-1.282	0.126	0.50	0.000	0.674	0.90	1.282	1.645
0.11	-1.227	0.138	0.51	0.025	0.690	0.91	1.341	1.695
0.12	-1.175	0.151	0.52	0.050	0.706	0.92	1.405	1.751
0.13	-1.126	0.164	0.53	0.075	0.722	0.93	1.476	1.812
0.14	-1.080	0.176	0.54	0.100	0.739	0.94	1.555	1.881
0.15	-1.036	0.189	0.55	0.126	0.755	0.95	1.645	1.960
0.16	-0.994	0.202	0.56	0.151	0.772	0.96	1.751	2.054
0.17	-0.954	0.215	0.57	0.176	0.789	0.97	1.881	2.170
0.18	-0.915	0.228	0.58	0.202	0.806	0.98	2.054	2.326
0.19	-0.878	0.240	0.59	0.228	0.824	0.98	2.054	2.326
0.20	-0.842	0.253	0.60	0.253	0.842	0.99	2.326	2.576
0.21	-0.806	0.266	0.61	0.279	0.860	0.991	2.366	2.612
0.22	-0.772	0.279	0.62	0.305	0.878	0.992	2.409	2.652
0.23	-0.739	0.292	0.63	0.332	0.896	0.993	2.457	2.697
0.24	-0.706	0.305	0.64	0.358	0.915	0.994	2.512	2.748
0.25	-0.674	0.319	0.65	0.385	0.935	0.995	2.576	2.807
0.26	-0.643	0.332	0.66	0.412	0.954	0.996	2.652	2.878
0.27	-0.613	0.345	0.67	0.440	0.974	0.997	2.748	2.968
0.28	-0.583	0.358	0.68	0.468	0.994	0.998	2.878	3.090
0.29	-0.553	0.372	0.69	0.496	1.015	0.999	3.090	3.291
0.30	-0.524	0.385	0.70	0.524	1.036	0.9991	3.121	3.320
0.31	-0.496	0.399	0.71	0.553	1.058	0.9992	3.156	3.353
0.32	-0.468	0.412	0.72	0.583	1.080	0.9993	3.195	3.390
0.33	-0.440	0.426	0.73	0.613	1.103	0.9994	3.239	3.432
0.34	-0.412	0.440	0.74	0.643	1.126	0.9995	3.291	3.481
0.35	-0.385	0.454	0.75	0.674	1.150	0.9996	3.353	3.540
0.36	-0.358	0.468	0.76	0.706	1.175	0.9997	3.432	3.615
0.37	-0.332	0.482	0.77	0.739	1.200	0.9998	3.540	3.719
0.38	-0.305	0.496	0.78	0.772	1.227	0.9999	3.719	3.891
0.39	-0.279	0.510	0.79	0.806	1.254			
0.40	-0.253	0.524	0.80	0.842	1.282			