

6. Cuplajul a două mulțimi disjuncte. Probleme de afectare (de repartitie)

În practica economică sunt foarte des întâlnite probleme în care se dorește asocierea optimă a elementelor unei mulțimi $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ cu elementele unei alte mulțimi $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ în condițiile unor limitări existente (și cunoscute) ale posibilităților de asociere.

În general, fiecare asociere posibilă $x_i \leftrightarrow y_j$ aduce un anumit efect a_{ij} (profit, cost etc) care poate fi calculat și vom presupune că este cunoscut.

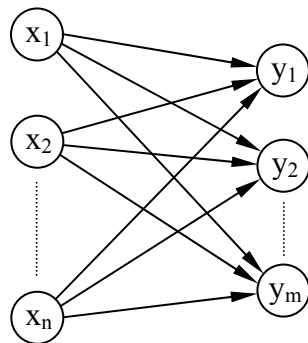
Limitările asupra asocierilor se traduc de obicei prin faptul că:

1. Un element x_i poate fi asociat doar cu anumite elemente din Y și reciproc;
2. La sfârșit, fiecărui element din X i s-a asociat cel mult un element din Y și reciproc.

Asocierea optimă presupune, de obicei, două obiective:

1. Să se facă maximul de asocieri;
2. Suma efectelor asocierilor să fie maximă (sau minimă, în funcție de semnificația acestora).

Reprezentarea geometrică a situației de mai sus este un graf de forma:



numit **graf bipartit**.

Definiția 1: Se numește **graf bipartit** un graf $G = (X, U)$ în care mulțimea nodurilor poate fi împărțită în două mulțimi disjuncte A și B astfel încât orice arc are extremitatea inițială în A și cea finală în B .

Definiția 2: Se numește **cuplaj** al unui graf bipartit o submulțime de arce $W \subseteq U$ cu proprietatea că nu există două arce adiacente (sau altfel spus, pentru orice nod există **cel mult** un arc incident acestuia).

Definiția 3: Se numește **cuplaj maxim** un cuplaj cu proprietatea că orice arc care nu face parte din cuplaj este adiacent cu un arc din cuplaj ($\Leftrightarrow$ orice arc am adăuga, nu mai rămâne cuplaj $\Leftrightarrow$ nu există nici un cuplaj în care să se includă strict $\Leftrightarrow$ conține numărul maxim de arce neadiacente)

Este evident că numărul de arce ale unui cuplaj este mai mic sau egal cu numărul de elemente din fiecare din mulțimile A și B ($\leq \min(|A|, |B|)$). Este interesant de văzut însă cât de mare este el efectiv și în ce condiții este egal chiar cu $\min(|A|, |B|)$.

Referitor la prima întrebare, în 1931 König a demonstrat o teoremă care permite stabilirea numărului de arce ale unui cuplaj maxim:

Teoremă: Numărul maxim de arce ale unui cuplaj într-un graf bipartit $G = (A \cup B, \Gamma)$ este egal cu $\min_{C \subseteq A} (|A - C| + |\Gamma(C)|)$

În ceea ce privește a doua problemă, observăm mai întâi că putem presupune că întotdeauna $|A| \leq |B|$, în caz contrar inversând sensul tuturor arcelor grafului, problema rămânând aceeași.

În acest caz:

$$\begin{aligned} \min_{C \subseteq A} (|A - C| + |\Gamma(C)|) = |A| &\Leftrightarrow \min_{C \subseteq A} (|A - C| + |\Gamma(C)|) - |A| = 0 \Leftrightarrow \min_{C \subseteq A} (-|C| + |\Gamma(C)|) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \max_{C \subseteq A} (|C| - |\Gamma(C)|) = 0 \Leftrightarrow \Gamma(C) \geq |C| \text{ oricare ar fi } C \subseteq A \end{aligned}$$

sau altfel spus, pentru orice submulțime C a lui A , mulțimea nodurilor atinse de arce care pleacă din nodurile sale, adică $\Gamma(C)$, are cel puțin atâtea elemente cât C .

De exemplu, la repartizarea angajaților pe posturi, fiecare angajat poate obține un post dorit dacă și numai dacă oricare ar fi mulțimea de r angajați există cel puțin r posturi diferite din care pot alege.

Presupunem, în continuare, că s-a asociat fiecărui arc (x_i, x_j) o valoare v_{ij} .

Definiția 4: Se numește valoare a unui cuplaj suma valorilor arcelor care îl formează.

În acest moment putem spune că determinarea unei asocieri optime a mulțimilor X și Y de la început este echivalentă matematic cu determinarea unui cuplaj maxim de valoare optimă (minimă sau maximă) în graful bipartit asociat.

Dintre problemele întâlnite în practica economică, ce se reduc matematic la găsirea unui cuplaj maxim de valoare optimă, amintim:

1. Problema repartizării muncitorilor unei secții la utilajele acestora în funcție de pregătirea și preferințele muncitorilor, complexitatea mașinilor etc;
2. transferarea unor informații într-un grup;
3. Repartizarea angajaților pe posturi;
4. Formarea grupelor de lucru după afinitățile dintre membrii colectivului.

În 1955, bazându-se pe teorema lui König, H.W. Kuhn a elaborat un algoritm, cunoscut în literatura de specialitate sub denumirea de **algoritmul ungar**, cu ajutorul căruia se poate determina un cuplaj maxim de valoare minimă într-un graf bipartit pentru care $|A| = |B| = n$.

El se bazează pe observația că, dacă se adună (sau scade) aceeași număr la toate valorile arcelor, nu se modifică ierarhia cuplajelor maxime, în ceea ce privește valoarea lor.

Vom prezenta algoritmul concomitent cu rezolvarea unui caz particular, pentru o mai bună receptare a acestuia:

"Într-o secție produsele finite se obțin în urma efectuării succesive a 6 operații pe 6 mașini. În această secție sunt angajați 6 muncitori, fiecare fiind calificat pentru efectuarea oricărei din cele 6 operații. Pentru a optimiza activitatea în secție cei 6 muncitori au fost supuși la un test în care fiecare a prelucrat un număr de piese, pe toate cele șase mașini. În final, calculându-se timpul mediu în care muncitorul M_i efectuează operația O_j s-au obținut valorile (în ore) date în tabelul de mai jos:

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
O_1	4	3	6	2	6	8
O_2	5	4	8	3	8	9
O_3	5	6	8	2	8	7
O_4	4	5	7	2	7	8
O_5	4	6	6	3	6	7
O_6	6	6	8	3	8	9

Să se găsească acea repartiție a muncitorilor la mașini astfel încât timpul în care o piesă se prelucurează succesiv pe cele 6 mașini să fie minim."

Pasul 1. Se construiește matricea pătratică M care are elementele:

$$m_{ij} = \begin{cases} \text{valoarea arcului } (x_i, x_j) & \text{daca exista arcul } (x_i, x_j) \\ \infty & \text{daca nu exista arcul } (x_i, x_j) \end{cases}$$

Pentru exemplul ales vom avea: $M = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 & 2 & 6 & 8 \\ 5 & 4 & 8 & 3 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 8 & 2 & 8 & 7 \\ 4 & 5 & 7 & 2 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 6 & 3 & 6 & 7 \\ 6 & 6 & 8 & 3 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Pasul 2. Se scade din fiecare linie minimul acesteia apoi, în matricea obținută, din fiecare coloană minimul acesteia (se poate face și invers, rezultatul final va fi același). Pentru exemplul dat vom obține succesiv matricile:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 6 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 5 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ și apoi } M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Ultima matrice este cea asupra căreia se aplică următoarele calcule. În acest moment pe fiecare linie și pe fiecare coloană se află cel puțin un 0, care corespunde celui mai mic timp. Se încearcă în continuare folosirea doar a acestor repartizări:

Pasul 3. În ordinea crescătoare a numărului de zerouri și de sus în jos (în cazul existenței mai multor linii cu același număr de zerouri) se încadrează pentru fiecare linie zeroul a cărui coloană conține cele mai puține zerouri (primul de la stânga dintre acestea, în caz de egalitate) și se barează celelalte zerouri de pe linia și coloana acestuia. Pe parcursul algoritmului sunt luate în considerare la numărare doar zerourile neîncadrate și nebarate încă. În final, pe fiecare linie și pe fiecare coloană va fi cel mult un zero încadrat. Dacă în final sunt n (= dimensiunea matricei) zerouri, atunci arcele corespunzătoare formează cuplajul căutat. Dacă sunt mai puține se trece la pasul 4.

În exemplul nostru avem trei linii cu câte un zero (a 3-a, a 4-a și a 5-a). Îl încadrăm pe cel de pe linia 3 (prima dintre ele) și barăm restul zerourilor de pe linia 3 și coloana 3, obținând:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \emptyset & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & \emptyset & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & \boxed{0} & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \emptyset & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & \emptyset & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \emptyset & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

În acest moment pe liniile 1 și 2 se află un zero. Se încadrează cel de pe linia 1 și se barează celelalte de pe linia 1 și coloana 2, obținând:

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{0} & 1 & \emptyset & 1 & 2 \\ 1 & \emptyset & 2 & \emptyset & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & \boxed{0} & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \emptyset & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & \emptyset & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \emptyset & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Ultima linie cu zerouri este linia 5 din care îl încadrăm pe primul și le barăm pe celelalte:

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{0} & 1 & \emptyset & 1 & 2 \\ 1 & \emptyset & 2 & \emptyset & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & \boxed{0} & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \emptyset & 2 & 2 \\ \boxed{0} & 2 & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ 2 & 2 & 2 & \emptyset & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

În total nu sunt 6 zerouri încadrate (sunt doar trei) și deci trecem la pasul 4.

Pasul 4. La acest pas se va stabili numărul minim posibil de linii și coloane care să conțină toate zerourile matricii. În acest sens vom proceda astfel:

- se marchează liniile care nu au nici un zero încadrat;
 - se marchează coloanele care au un zero barat pe o linie marcată;
 - se marchează liniile care au un zero încadrat pe o linie marcată (dacă există);
- Se repetă operațiile b) și c) până nu mai poate fi marcată nici o linie și nici o coloană.

În cazul nostru vom avea:

- se marchează liniile 2, 4 și 6;
- se marchează coloanele 2 și 4;
- se marchează liniile 1 și 3;
- nu mai marcăm nici o coloană deoarece nu mai există nici un zero barat pe liniile 1 și 3, care să corespundă unei coloane nemarcate;
- nu mai marcăm nici o linie, deoarece nu a mai apărut nici o coloană marcată.

Rezultă:

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{0} & 1 & \emptyset & 1 & 2 \\ 1 & \emptyset & 2 & \emptyset & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & \boxed{0} & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \emptyset & 2 & 2 \\ \boxed{0} & 2 & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ 2 & 2 & 2 & \emptyset & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \star \\ \star \\ \star \\ \star \\ \star \\ \star \end{matrix}$$

Pasul 5. Se taie liniile nemarcate și coloanele marcate:

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{0} & 1 & \emptyset & 1 & 2 \\ 1 & \emptyset & 2 & \emptyset & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & \boxed{0} & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \emptyset & 2 & 2 \\ \boxed{0} & 2 & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ 2 & 2 & 2 & \emptyset & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \star \\ \star \\ \star \\ \star \\ \star \\ \star \end{matrix}$$

Pasul 6. Se împart elementele matricii în trei grupe:

G_1 = elemente aflate la intersecții de linii netăiate cu coloane netăiate;

G_2 = elemente situate la intersecții de linii tăiate cu coloane netăiate sau de linii netăiate cu coloane tăiate;

G_3 = elemente situate la intersecții de coloane tăiate cu linii tăiate

Pasul 7. Se găsește minimul grupei G_1 , care se scade din fiecare element al lui G_1 și se adună la fiecare element al grupei G_3 . Elementele grupei G_2 rămân neschimbate.

Pentru exemplul dat, minimul lui G_1 este 1 și obținem noua matrice:

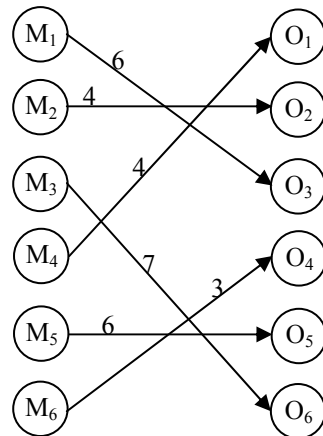
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pasul 8. Se reia algoritmul de la pasul 3.

Vom avea după marcarea:

$$\begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & \boxed{0} & \emptyset & \emptyset & 1 \\ \emptyset & \boxed{0} & 1 & \emptyset & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & \emptyset & 2 & \boxed{0} \\ \boxed{0} & 2 & 1 & \emptyset & 1 & 1 \\ \emptyset & 3 & \emptyset & 1 & \boxed{0} & \emptyset \\ 1 & 2 & 1 & \boxed{0} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Deoarece avem 6 zerouri încadrate, am obținut cuplajul maxim de valoare minimă căutat, căruia îi va corespunde repartizarea muncitorilor pe operații de mai jos:

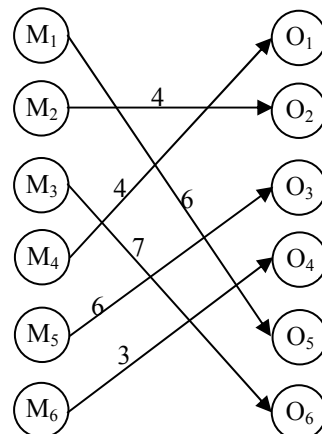


care duce la o durată totală a prelucrării unei piese de $6 + 4 + 7 + 6 + 3 = 26$ ore

Observație: Deoarece regula de a alege de sus în jos la linii cu același număr de zerouri este arbitrară și de asemenea alegerea primului zero de la stânga, putem ajunge și la alte cuplaje maxime, dar toate vor avea aceeași valoare, cea minimă. De exemplu, un alt cuplaj optim este:

$$\begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \boxed{0} & 1 \\ \emptyset & \boxed{0} & 1 & \emptyset & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & \emptyset & 2 & \boxed{0} \\ \boxed{0} & 2 & 1 & \emptyset & 1 & 1 \\ \emptyset & 3 & \boxed{0} & 1 & \emptyset & \emptyset \\ 1 & 2 & 1 & \boxed{0} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

adică



care are de asemenea valoarea 26.

Observația 1. Dacă dorim un cuplaj de valoare maximă atunci vom calcula la pasul 1 matricea M astfel:

1. Construind matricea A de elemente:

$$a_{ij} = \begin{cases} \text{valoarea arcului } (x_i, x_j) & \text{daca exista arcul } (x_i, x_j) \\ -\infty & \text{daca nu exista arcul } (x_i, x_j) \end{cases}$$

2. Matricea M va avea componentele: $m_{ij} = \max_{1 \leq i, j \leq n} (a_{ij}) - a_{ij}$

apoi aplicăm în continuare algoritmul.

Observația 2. Dacă $|A| \neq |B|$ atunci aplicăm același algoritm cu singura diferență că ne vom opri când vom obține un număr de zerouri egal cu $\min(|A|, |B|)$.