PROBLEME PROPUSE PENTRU CAIETUL DE TEME

TEMA 1

Să se rezolve problemele de programare în numere întregi:
a) Folosind algoritmul Gomory
b) Folosind QM
c) Folosind metoda grafică (acolo unde este posibil)

1. $$\begin{cases} -x_1+x_2 \leq 3 \\ 3x_1+2x_2 \leq 24 \\ 2x_1+3x_2 \leq 29 \\ x_{1,2} \geq 0, \text{ întregi} \\ (max) f = 9x_1+7x_2 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} (max) f = -10x_1+11x_2 \\ -x_1+10x_2 \leq 40 \\ x_1+x_2 \leq 20 \\ xj \geq 0, \text{ întregi} \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} (max) f = 3x_1+3x_2+2x_3 \\ 3x_1+4x_2+x_3 \leq 2 \\ x_1+3x_2+2x_3 \leq 1 \\ xj \geq 0, \text{ întregi} \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} (max) f = 2x_1+3x_2 - x_3 \\ 6x_1+24x_2 - 9x_3 \leq 14 \\ 9x_1 - x_2+6x_3 \leq 24 \\ xj \geq 0, \text{ întregi} \end{cases}$$

TEMA 2

Probleme de croire unidimensională.

1. Din bare cu lungimea 132 trebuie tăiate bare cu lungimea 44, 33, 12 în cantitățile 2, 3, 6 buc (socotite minimale). Care este numărul minim de suporți ce trebuie tăiați şi cum vor fi ei croiți pentru a obține cantitățile specificate?

2. L = 80;
$l_1 = 25$, $l_2 = 23$, $l_3 = 16$;
$b_1 = 200$, $b_2 = 240$, $b_3 = 175$;
Aplicați toate metodele cunoscute de rezolvare.

3. L = 90;
$l_1 = 47$, $l_2 = 30$, $l_3 = 24$, $l_4 = 11$;

b_1 = 200, b_2 = 250, b_3 = 300, b_4 = 500;
Aplicați toate metodele cunoscute de rezolvare.

TEMA 3

1. Se consideră problema combinatorială

$$(P)\begin{cases}(\max) f(x) \\ x \in A\end{cases}$$

a cărei mulțime de soluții este reprezentată de mulțimea

$\Omega = \{a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, m, n, p\}$

Se cunosc valorile funcției obiectivului în fiecare din aceste soluții. De asemenea este dat un „oracol" care o dată solicitat indică dacă o anumit[soluție este sau nu admisibilă.

a	b	c	d	e	f	g	h	k	l	m	n	p
10	21	15	9	20	13	30	17	16	23	7	19	5
0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0

Aceste date pot fi folosite numai în următoarele condiții :

a) se poate consulta lista valorilor pentru a găsi elementul x_s care maximizează obiectivul f pe o mulțime dată $S \subset \Omega$

b) după determinarea lui x_s se poate consulta oracolul pentru a decide dacă x_s este soluție admisibilă sau nu.

c) Există o regulă R de ramificare care aplicată unei mulțimi $S \subset \Omega$ cu cel puțin 2 elemente o partiționează în 2 submulțimi S' si S'' după următorul procedeu :

- se ordonează elementele din S în ordine alfabetică .
- în S' se includ primele $[|S|/3]+1$ elemente iar în S'' restul

Să se determine elementul optimal x^x folosind metoda B-B. Câte soluții sunt „ efectiv generate"? (Vom spune că o soluție este efectiv generată dacă rezultă în urma unei operații de mărginire (a unei submulțimi din Ω). Câte soluții admisibile sunt efectiv generate?

2. Mulțimea soluțiilor unei probleme combinatoriale (P) este :

$\Omega = \{a, b, c, d, e, fg, h, k, l, m\}$

Se cunosc valorile funcției obiectiv în fiecare din aceste soluții. De asemenea se dă un oracol care o dată solicitat indică o anumită soluție este admisibilă sau nu.

a	b	c	d	e	f	g	h	k	l	m
21	17	19	18	24	18	20	21	21	25	22
1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1

Tabelul poate fi consultat în următoarele situații:

1) Pentru a găsi elementul x_S care maximizează funcției obs. Pe o submulțime $S \subset \Omega$

2) Pentru a decide dacă x_S este SA sau nu.

Există o regulă de ramificare care aplicată unei submulțimi S o împarte în 2 submulțimi disjuncte S' și S'', în S' intrând primele $\left[\frac{ISI}{4}\right]+1$ elemente iar în S'' restul. (S se presupune a fi ordonată alfabetic). Să se determine soluția optimă a lui (P) utilizând metoda B-B.

TEMA 4

Probleme de programare liniară bivalentă

1. Să se determine $x^*=(x_1^*,...,x_5^*)$ care maximizează

$$f = -7x_1+6x_2+4x_3-5x_4-6x_5$$

cu restricțiile:

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 3x_5 \le 1 \\ x_2 - x_3 - 4x_4 - 2x_5 \le -1 \\ x_1 + 4x_3 + 3x_4 \le 4 \\ x_j \in \{0,1\},\ j=\overline{1,5} \end{cases}$$

2. Problemă de alegere a unor proiecte de dezvoltare

O firmă are 6 proiecte de dezvoltare în diferite domenii de activitate întinse pe o durată de cel mult 3 ani. Firma ar dori să le realizeze pe toate dar, din cauza posibilităților financiare limitate va trebui sa aleagă doar pe unele dintre ele. Cunoscând profiturile pe care aceste proiecte le-ar aduce firmei în caz de realizare, ce proiecte ar trebui alese astfel încât profitul total obținut de firmă să fie maxim? (Se presupune că profitul de pe urma realizării unui proiect nu este condiționat de realizarea sau nerealizarea altuia așa că profitul total va fi suma profiturilor obținute de pe urma proiectelor realizate).

Datele problemei:

PROIECT / ANUL	NECESARUL ANUAL DE INVESTITII (DIFERENȚIAT PE PROIECTE)						PLAFON ANUAL PENTRU INVESTIȚII
	1	2	3	4	5	6	
1	2	1	2,5	3	5	5,5	10
2	5	3	3,5	4,5	4	2	9
3	-	4	2,5	-	5	6	12
PROFIT	3	4	4,5	5	7	8	*

Sugestii:

Modelul matematic

Fie $x_j = \begin{cases} 1 & \text{dacă proiectul j este ales;} \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$ $j=1,6$

Urmează să găsim $x^* = (x_1^*, ..., x_6^*)$ astfel încât:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2{,}5x_3 + 3x_4 + 5x_5 + 5{,}5x_6 \leq 10 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3{,}5x_3 + 4{,}5x_4 + 4x_5 + 2x_6 \leq 9 \\ 4x_2 + 2{,}5x_3 + 5x_5 + 6x_6 \leq 12 \\ x_j \in \{0,1\} \quad j = 1, ..., 6 \\ (max)f = 3x_1 + 4x_2 + 4{,}5x_3 + 5x_4 + 7x_5 + 8x_6 \end{cases}$$

TEMA 5

1. Considerăm programul neliniar

$$(P) \begin{cases} (max)f = x_1 + x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

a) Verificați faptul că (P) este un program convex
b) Rezolvați programul folosind metoda grafică
c) Utilizați condițiile K-T pentru a verifica optimalitatea soluției obținută la b).

2. Considerăm problemele de optimizare fără restricții

a) $(max) f = 2x_1x_2 + x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$, $\varepsilon = 0{,}25$
b) $(max) f = 2x_1x_2 - 2x_1^2 - x_2^2$, $\varepsilon = 0{,}5$

1°. Aplicați metoda gradientului pentru $x^0 = (1, 1)$
2°. Rezolvați sistemul de ecuații liniare obținut din $\nabla f(x) = 0$ pentru a determina soluția optimă exactă

3^o. Reprezentați grafic drumul parcurs la punctul 1^o prin determinarea soluțiilor aproximative indicând convergența acestor soluții către optimul exact determinat la punctul 2^o.

3. Considerăm date programele neliniare

$$(P_1)\begin{cases} (min)f = 2x_1 + x_2^3 + x_3^2 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}, \qquad x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(P_2)\begin{cases} (max)f = 4x_1 + 6x_2 - x_1^3 - x_2^2 \\ x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}, \qquad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

a) Scrieți forma canonică de MIN a programelor (P_1) şi (P_2)
b) Scrieți condițiile de optimalitate K-T şi verificați dacă vectorii $x^{(1)}$ şi $x^{(2)}$ pot fi soluțiile optime ale celor 2 programe.