CAPITOLUL 2

Jocuri statice în informaţie completă

2.1. Jocuri sub formă normală

Un *joc sub formă normală* (sau strategică) este definit prin trei elemente: mulţimea jucătorilor $i \in \Pi$, cu $\Pi = \{1,2,..I\}$ o mulţime finită, spaţiul strategiilor pure S_i pentru fiecare jucator i şi funcţiile de câştig (sau de plată) u_i .

Vom nota acest joc cu $G = \{S_1,...,S_I; u_1,...u_I\}$.

Vom numi *strategie pură* $s_i \in S_i$ pentru jucătorul i acţiunea realizabilă care poate fi aleasă de jucătorul i din spaţiul strategiilor pure S_i şi care îi va aduce câştigul $u_i(s)$.

Vom nota cu $s \in \times S_i$, $s = (s_1, s_2 ..., s_I)$ vectorul acţiunilor realizabile alese la un moment dat de către jucători (uzual, vom mai nota $s = (s_i, s_{-i})$, cu $s_{-i} = (s_1,..., s_{i-1}, s_{i+1},..., s_I)$ fiind acţiunile (strategiile) alese de către jucătorii care joacă împotriva jucătorului i).

Funcţiile de câştig $u_i(s)$ sunt definite ca funcţii de utilitate de tip von Neumann – Morgenstern pentru fiecare profil al strategiilor realizabile $s = (s_1,..., s_I)$, adică în funcţie de strategiile alese de către toţi jucătorii.

De exemplu, la nivelul unui agent economic această funcţie de utilitate poate fi nivelul profitului, nivelul încasărilor sau nivelul costului. Pentru analiştii politici, aceste câştiguri pot fi numărul de voturi câştigate sau alegerea unei platforme electorale.

O categorie specială de jocuri o constituie *jocurile de sumă nulă*. În cazul acestor jocuri, suma câştigurilor este zero, $\sum_{i=1}^{I} u_i(s) = 0 \ \ , \forall s \in \times S_i$, adică pierderea unor jucători reprezintă câştigul celorlalţi. Cum aceste jocuri reprezintă doar un caz particular, este mai interesantă analiza jocurilor în general, indiferent de suma utilităţilor (a câştigurilor).

Faptul că jocul se desfăşoară în informaţie completă presupune că jucătorii ştiu care sunt strategiile realizabile ale tuturor, precum şi care sunt funcţiile de câştig ale fiecăruia, în funcţie de strategiile alese.Vom numi acestea „ cunoştinţă comună”.

Exemplul 2.2. Dilema prizonierului

Să considerăm exemplul clasic al „dilemei prizonierului”. Aceasta presupune că doi suspecţi sunt arestaţi, fiind învinuiţi de comiterea unei crime. Ei sunt anchetaţi în camere separate, şi fiecare are la dispoziţie două variante de răspuns: fie să păstreze tăcerea, adică să nege că ar fi comis crima, fie să îl acuze pe celălalt prizonier. Dacă suspecţii se acuză reciproc, atunci ei vor primi ca pedeapsă câte 7 ani de închisoare. Dacă ambii neagă, atunci pedeapsa va fi de 1 an închisoare pentru fiecare, iar dacă unul neagă, iar celălalt acuză, atunci cel care acuză va fi eliberat , iar cel care neagă va fi pedepsit cu 10 ani de închisoare.

În această descriere a jocului avem toate elementele necesare pentru un joc sub formă normală (strategică). Mulțimea jucătorilor este finită, $i \in \{1,2\}$, mulțimea strategiilor pentru fiecare jucător este aceeaşi, $S = \{A, N\}$ (cu *A* = *Acuză*, *N* = *Neagă*), iar funcțiile de câştig vor fi:

$$
\begin{array}{ll}
u_1(A,A) = -7; & u_2(A,A) = -7; \\
u_1(A,N) = 0; & u_2(A,N) = -10; \\
u_1(N,A) = -10; & u_2(N,A) = 0; \\
u_1(N,N) = -1; & u_2(N,N) = -1.
\end{array}
$$

Acest joc în formă normală poate fi reprezentat şi sub *formă matriceală*.

Matricea jocului va conține toate elementele necesare descrierii unui joc în formă normală, adică jucătorii, strategiile disponibile şi funcțiile de câştig .
În cazul nostru avem:

Prizonier2

Prizonier1		*A*	*N*
	A	-7,-7	0,-10
	N	-10,0	-1,-1

Figura 2.1

Liniile şi coloanele matricii indică strategiile realizabile ale jucătorilor (strategiile pure), iar celulele matricii vor conține câştigurile fiecărui jucător, în funcție de strategiile alese, cu primul număr indicând câştigul jucătorului1, iar al doilea pe cel al jucătorului 2.

Vom defini *o strategie mixtă* a jucătorului *i* o distribuție de probabilitate p_i asupra mulțimii strategiilor realizabile (pure). Dacă vom nota cu P spațiul strategiilor mixte, el va fi produsul cartezian al strategiilor mixte realizabile pentru fiecare jucător: P = x P_i, cu $p_i \in P_i$.

Suportul (baza) unei strategii mixte va fi format din strategiile pure pe care le au la dispoziție jucătorii, care au asignate probabilități pozitive de a fi alese. Câştigul jucătorului *i* care va juca strategia mixtă p_i este:

$$u_i(p_i(s)) = \sum_{s_j \in S} p_i(s_j) \cdot u_i(s).$$

Evident, $\sum_j p_i(s_j) = 1$.

În exemplul nostru, fie $p_1 = (1/2, 1/2)$, iar $p_2 = (1/3, 2/3)$ (adică jucătorul 1 va acuza cu probabilitatea 1/2 şi va nega cu probabilitatea 1/2, iar jucătorul 2 va acuza cu probabilitatea 1/3 şi va nega cu probabilitatea 2/3). Atunci câştigul jucătorului 1 pentru strategia mixtă p_1 ,ținând cont de faptul că jucătorul 2 joacă strategia mixtă p_2 va fi :

$$u_1(p_1, p_2) = \frac{1}{2}\cdot(1/3\cdot(-7)+2/3\cdot(0))+\frac{1}{2}\cdot(1/3\cdot(-10)+2/3\cdot(-1)) = -19/6.$$

Pentru jucatorul 2 avem:

$$u_2(p_1, p_2) = \frac{1}{3}\cdot(1/2\cdot(-7)+1/2\cdot(0))+\frac{2}{3}\cdot(1/2\cdot(-10)+1/2\cdot(-1)) = -23/6.$$

Observație. Putem considera strategiile mixte şi ca o generalizare a strategiilor pure, dacă $p_i = (0,0,..,1,..,0)$, cu probabilitatea 1 corespunzător strategiei pure $s_j \in S_i$ şi 0 pentru toate celelalte.

2.2. Strategii dominate

Vom explica acest concept pornind de la exemplul precedent. În cazul jucătorului *2*, el poate juca fie *A*, fie *N*. Dacă primul jucător va juca *A*, atunci *2* are de ales între a juca *A* şi a avea câştigul *(-7)* sau a juca *N* şi a avea câştigul *(–10)*. Evident că el va prefera să joace *A*, deoarece stă mai puțin în închisoare. Dacă *1* joacă *N,* atunci *2* poate juca *A*, cu cu câştigul *(0)* sau *N*, cu câştigul *(–1)*. Evident, el va alege tot *A*.

Cu alte cuvinte, indiferent ce ar alege jucătorul 1, pentru jucătorul 2 este mai bine să joace *A* decât *N,* adică vom spune că strategia *N* (de a nega) este dominată de strategia *A* (de a acuza). Un raționament asemănător se face şi pentru jucătorul 1, strategia *N* fiind dominată de către strategia *A*. Putem da acum următoarea definiție:

Definiția 2.2. În jocul sub forma normală $G = \{S_1,...,S_I; u_1,...u_I\}$, fie s_i' şi s_i'' două strategii realizabile pentru jucătorul i ($s_i', s_i'' \in S_i$). Vom spune că strategia s_i' este *strict dominată (dominată)* de strategia s_i'', dacă oricare ar fi combinația de strategii realizabile ale celorlalți jucători, câştigul jucătorului *i* dacă joacă s_i' este strict mai mic (respectiv mai mic sau egal) decât câştigul pe care îl are jucând s_i'':

$$u_i(s_1,..s_{i-1}, s_i', s_{i+1},.., s_I) < u_i(s_1,.., s_{i-1}, s_i'', s_{i+1},.., s_I)$$

(sau $u_i(s_i', s_{-i}) \le u_i(s_i'', s_{-i})$)

cu $s_{-i} \in S_1 \times S_2 \times ... \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times ... \times S_I$.

Vom presupune că jucătorii raționali (vom înțelege prin jucător rațional acel jucător care urmăreşte întotdeauna maximizarea câştigului propriu in funcție de alegerea strategiilor de către ceilalți jucători) nu vor alege niciodată să joace o strategie dominată.

Pentru jocul nostru, vedem că soluția (echilibrul) jocului este ca fiecare jucător să joace *A*, adică *(A,A)*. Analog, putem defini o strategie strict dominantă (slab dominantă):

Definiția 2.3. Strategia pură s_i este strict dominantă (slab dominantă) pentru jucătorul *i* dacă $p_i' \in$ P$_i$ astfel încât $u_i(P_i', s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i})$, $\forall s_{-i} \in S_{-i}$ (sau $u_i(P_i', s_{-i}) \ge u_i(s_i, s_{-i})$).

Procesul de determinare a echilibrului reprezintă algoritmul de eliminare iterativă a strategiilor strict dominate.

Determinarea echilibrului prin algiritmul eliminării strategiilor dominate

Vom descrie algoritmul pornind de la următorul exemplu: fie un joc static sub formă normală definit prin matricea jocului din figura 2.2.

Jucător1 \ Jucător 2	*Stânga*	*Mijloc*	*Dreapta*
Sus	2,1	2,3	1,2
Jos	1,4	1,2	3,1

Figura 2.2

În prima etapă a algoritmului vom căuta să descoperim dacă există vreo strategie dominată pentru unul din jucători:

Pentru jucătorul 1, observăm că strategia „Sus" nu domină strategia „Jos" (deoarece avem $2 > 1$ dacă jucătorul 2 joacă *Stânga*; $2 > 1$ dacă jucătorul 2 joacă *Mijloc,* dar $1 < 3$, dacă jucătorul 2 joacă *Dreapta*).

Pentru jucătorul 2 avem: strategia *Mijloc* nu domină strategia *Stânga* ($3 > 1$, dar $2 < 4$), în schimb domină strategia *Dreapta* ($3 > 2$; $2 > 1$).

Deci pentru jucătorul 2 este mai convenabil – indiferent de ceea ce ar juca primul jucător – este să joace *Mijloc* decât *Dreapta*. Prin urmare, vom elimina strategia (sau strategiile – în cazul în care sunt mai multe) dominată, iar noua matrice a jocului va fi :

Jucător1 \ Jucător2	*Stânga*	*Mijloc*
Sus	2,1	2,3
Jos	1,4	1,2

Figura 2.3

Pentru acest nou joc analizăm care sunt posibilitățile de alegere pentru jucătorul 1 (reluăm algoritmul).Vedem că în acest caz strategia *Sus* domină strategia *Jos* ($2 > 1$; $2 > 1$), pe care o vom elimina . Noua matrice a jocului este:

Jucător1 \ Jucător2	*Stânga*	*Mijloc*
Sus	2,1	2,3

Figura 2.4

Pentru jucătorul 2 acum, strategia *Stânga* este dominată de strategia *Mijloc* ($1 < 3$), deci o vom elimina.

Pentru jocul descris, rezultă singurul echilibru posibil dat de alegerea strategiilor *(Sus, Mijloc)*, pentru care câştigurile vor fi (2,3).

Totuşi, doar pentru o categorie redusă de jocuri se poate determina echilibrul prin algoritmul de eliminare iterativă a strategiilor dominate.

De exemplu, pentru jocul sub formă normală descris prin matricea jocului din figura 2.5 nu se poate determina acest tip de echilibru. (deoarece nici o strategie nu este dominată pentru nici unul din jucători).

Jucător 2

		St	*M*	*D*
	S	1,3	3,1	3,2
Jucător 1	*M*	3,1	1,3	3,2
	J	2,3	2,3	4,4

Figura 2.5

Vom lărgi spaţiul soluţiilor posibile în cazul jocurilor statice prin introducerea conceptului de echilibru Nash.

2.3 Echilibrul Nash

Definiţia 2.4 În jocul sub formă normală $G = \{S_1,...,S_I ; u_1,...u_I\}$,strategiile pure $\left(s_1^*,..,s_I^*\right)$ constituie un *echilibru Nash* dacă pentru fiecare jucător *i*, s_i^* este cel mai bun răspuns la strategiile celorlalţi I - 1 jucători $\left(s_1^*,..s_{i-1}^*,s_{i+1}^*,..,s_I^*\right)$, adică:

$$u_i\left(s_1^*,..s_{i-1}^*,s_i^*,s_{i+1}^*,..,s_I^*\right) \geq u_i\left(s_1^*,..s_{i-1}^*,s_i,s_{i+1}^*,..,s_I^*\right) \quad , \forall s_i \in S_i$$

sau s_i^* va fi soluţia problemei:

$$\max_{s_i \in S_i} u_i\left(s_1^*,..s_{i-1}^*,s_i,s_{i+1}^*,..,s_I^*\right)$$

Extinzând definiţia şi în spaţiul strategiilor mixte vom avea:

Definiţia 2.5. O strategie profil mixt $p^* = \left(p_i^*, p_{-i}^*\right)$ constituie un *echilibru Nash* al jocului $G = \{S_1,...,S_I ; u_1,...u_I\}$dacă oricare ar fi jucătorul *i*, atunci $u_i\left(p_i^*, p_{-i}^*\right) \geq u_i\left(s_i, p_{-i}^*\right)$, $\forall s_i \in S_i$.

Observaţie. Strategia s_i^* care asigura maximizarea câştigului jucătorului *i* in raport cu strategiile jucate de ceilalţi jucături se mai numeste *"cel mai bun răspuns"* (best response) al jucătorului *i* la strategiile alese de ceilalţi.

Cu alte cuvinte, $s_i^* = \arg\max_{s_i \in S_i} \; u_i\left(s_1^*,..s_{i-1}^*,s_i,s_{i+1}^*,..,s_I^*\right)$

Vom spune că un echilibru Nash este *puternic (strict)* dacă fiecare jucător are un cel mai bun răspuns la strategiile oponenților unic (adică s^* este un echilibru Nash *puternic (strict)* dacă $u_i\left(s_i^*, s_{-i}^*\right) > u_i\left(s_i, s_{-i}^*\right)$) oricare ar fi jucătorul *i*).

Un echilibru Nash este *slab (nestrict)* dacă el nu este unic. În cazul echilibrului obținut prin eliminarea iterativă a strategiilor dominate, acesta este un echilibru Nash puternic, deoarece este unicul echilibru al jocului, iar strategiile alese de jucători sunt cel mai bun răspuns posibil (deoarece le-am eliminat pe toate celelalte care nu sunt răspunsuri acceptabile).

Deci atât în cazul „*dilemei prizonierului*”, cât şi în cazul jocului prezentat anterior, avem un echilibru Nash unic, (*Acuză,Acuză*) în primul caz, respectiv (*S,M*) în al doilea.

Pentru jocul descris în figura 2.5, prin algoritmul eliminării strategilor dominate nu poate fi determinat echilibrul, deoarece nu există strategii dominate. Pentru a determina totuşi acest echilibru vom descrie un alt algoritm, respectiv algoritmul determinării celui mai bun răspuns, (sau algoritmul maximizării câştigurilor relative).

Determinarea echilibrului prin algoritmul maximizării câştigurilor relative

Să determinăm echilibrul Nash al jocului prezentat în Figura 2.6 :

		Jucător2		
		St	M	D
	S	1,$\underline{3}$	$\underline{3}$,1	3,2
Jucător1	M	$\underline{3}$,1	1,$\underline{3}$	3,2
	J	2,3	2,3	$\underline{4}$,$\underline{4}$

Figura 2.6

Algoritmul este următorul: pentru fiecare jucător *i* vom determina cel mai bun răspuns pe care îl poate da în raport cu alegerile celorlalți jucători. (În matricea jocului, vom sublinia câştigurile jucătorului *i* ce sunt obținute prin alegerea celui mai bun răspuns). Dacă există o combinație de strategii care să maximizeze câştigurile tuturor jucătorilor (respectiv o casuță a matricei în care să fie subliniate ambele câştiguri) atunci acesta constituie echilibrul Nash al jocului determinat prin algoritmul celui mai bun răspuns.

Aplicând acest algoritm jocului din figura 2.6 rezultă: dacă jucătorul *1* ar juca strategia *S*, atunci pentru jucătorul *2* cel mai bun răspuns este să joace *St*, deoarece $3 > 1$ şi $3 > 2$, deci vom sublinia câştigul corespunzător, 3, care corespunde strategiei *St*. Dacă *1* ar juca *M,* atunci *2* va juca *M* ($3 > 1$; $3 > 2$), şi vom sublinia câştigul 3 ce corespunde strategiei *M* *,* iar dacă *1* ar juca *J*, atunci *2* va juca *D,* obținând câştigul 4, pe care îl vom sublinia. Procedăm în mod analog şi pentru jucătorul *2*. Dacă *2* ar juca strategia *St* atunci cel mai bun răspuns al jucătorului *1* este să joace *M* cu câştigul 3, pe care îl vom sublinia. Dacă *2* joacă *M* atunci *1* joacă *S,* cu câştigul 3, subliniat, iar dacă *2* joacă *D*, atunci *1* joacă *J,* cu câştigul 4, subliniat la rândul său.

Observăm că cele mai bune răspunsuri ale jucătorilor *1* şi *2* au un punct comun, respectiv jucătorul *1* să joace strategia *J* iar jucătorul *2* să joace strategia *D*. Aceasta corespunde situației în care în căsuța *(J,D)* a matricei câştigurilor sunt subliniate ambele câştiguri, (4,4).

Acesta este unicul echilibru Nash al jocului (fiind un echilibru Nash strict).

Exemplu. *Bătălia sexelor*

Să considerăm acum un alt joc celebru şi anume „*bătălia sexelor*”. Acest joc constă în următoarele: într-o familie, soțul şi soția trebuie să decidă unde vor merge într-o seară pentru a se distra, având de ales între a merge la un meci de fotbal şi a merge la teatru. Dintre aceste variante, soțul preferă să meargă la fotbal, iar soția la teatru. Dacă unul din ei cedează, atunci cel care cedează va avea câştigul 2, iar cel care nu cedează, va câştiga 4. În cazul în care nici unul nu cedează, atunci vor ramâne acasă, iar câştigul fiecăruia va fi 0.

Matricea jocului este următoarea:

		Soție	
		F	*T*
Soț	*F*	$\underline{4},\underline{2}$	0,0
	T	0,0	$\underline{2},\underline{4}$

Figura 2.7

Să determinăm care este echilibrul Nash al acestui joc, prin algoritmul maximizării câştigurilor relative: dacă soțul alege să meargă la fotbal, atunci cel mai bun răspuns al soției este să cedeze, (deoarece dacă nu cedează câştigă 0, în timp ce dacă va ceda va câştiga 2). Dacă soțul alege să meargă la teatru, evident pentru soție este optim să aleagă aceeaşi strategie. Raționând analog şi pentru soție, obsevăm că în cazul acestui joc, avem două echilibre Nash în strategii pure, adică *(F,F),* respectiv *(T,T),* cu câştigurile (4,2), respectiv (2,4).

Cum deja am găsit două echilibre Nash ale jocului, intrebarea care se pune în continuare este aceea de a vedea dacă nu mai sunt şi alte echilibre. Pentru aceasta vom căuta echilibre în strategii mixte.

Algoritmul determinării echilibrului în strategii mixte

Prin acest algoritm vom determina echilibrul (sau echilibrele) în strategii mixte. Pentru aceasta vom asocia fiecărei strategii pure a jucătorului i o anumită probabilitate. Pentru fiecare jucător, mulțimea strategiilor formează un câmp complet de evenimente, deci suma probabilităților asociate va fi unitară. În continuare, pentru fiecare strategie vom determina câştigul aşteptat. Vom elimina din calcule strategiile dominate - sau le asociem probabilitatea nulă (0) de a fi jucate – şi vom determina probabilitățile pentru care câştigurile aduse de strategiile nedominate sunt egale. Acesta va constitui echilibrul jocului în strategii mixte.

Observație. Probabilitățile asociate strategiilor reprezintă ipoteze pe care le fac ceilalți jucători despre modul în care va juca jucătorul i.

În cazul *bătăliei sexelor* vom avea: presupunem că soția crede că soțul va merge la fotbal cu probabilitatea p_1 şi la teatru cu probabilitatea $1-p_1$, iar soțul crede că soția va merge la fotbal cu probabilitatea p_2, respectiv la teatru cu probabilitatea $1-p_2$. În figura 2.8 avem reprezentarea sub formă matriceală :

			Soție	
			p_2	$1-p_2$
			F	T
Soț	P_1	F	$\underline{4,2}$	0,0
	$1-p_1$	T	0,0	$\underline{2,4}$

Figura 2.8

Atunci câştigul asociat strategiei mixte *(p_1, 1- p_1)* este câştigul aşteptat de soție dacă alege să meargă la teatru, respectiv la fotbal. Astfel, atunci utilitatea aşteptată a soției va fi:

$$u_2((p_1,1-p_1);F) = 2\cdot p_1 + 0\cdot(1-p_1) = 2p_1$$
$$u_2((p_1,1-p_1);T) = 0\cdot p_1 + 4\cdot(1-p_1) = 4-4p_1.$$

La echilibru, $u_2((p_1,1-p_1);F) = u_2((p_1,1-p_1);T)$ şi $p_1 + p_2 = 1$

Din rezolvarea sistemului rezultă $p_1 = 2/3$.

Deci dacă soția crede că soțul doreşte să meargă la fotbal cu o probabilitate $p_1 > 2/3$ atunci soția va alege să meargă la fotbal, (adică $p_2 = 1$), iar dacă $p_1 < 2/3$ atunci deci va alege să meargă la teatru ($p_2 = 0$).

În cazul în care $p_1 = 2/3$ atunci îi este indiferent ce alege, deoarece câştigul aşteptat este acelaşi.

Cu alte cuvinte, dacă $p_1 > 2/3$, atunci cel mai bun răspuns al soției este să meargă la fotbal, iar dacă $p_1 < 2/3$ atunci cel mai bun răspuns al soției este să meargă la teatru.

Raționând analog şi pentru soț, vom obține $p_2 = 1/3$, adică soțul va alege să meargă la fotbal dacă el crede că soția doreşte să meargă la fotbal cu o probabilitate $p_2 > 1/3$ şi să meargă la teatru, dacă $p_2 < 1/3$, fiind indiferent unde va merge dacă $p_2 = 1/3$.

Prin urmare, mai există un echilibru Nash al jocului, echilibru în strategii mixte, pentru care strategiile mixte sunt: $(p_1^*, p_2^*) = ((2/3, 1/3), (1/3, 2/3))$.

Reprezentând grafic cel mai bun răspuns al fiecărui jucător figura 2.9:

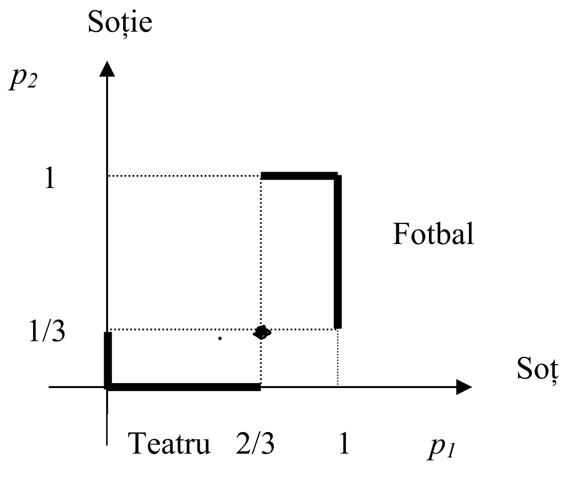

Figura 2.9.

La intersecţia graficelor funcţiilor celor mai bune răspunsuri ale fiecăruia se găsesc echilibrele Nash ale acestui joc, care sunt două în strategii pure: *(F,F),* respectiv *(T,T)* şi unul în strategii mixte *((2/3,1/3),(1/3,2/3)).*

2.4. Puncte focale, echilibre Nash multiple şi optimalitatea Pareto

In cazul multor jocuri, echilibrul Nash nu este unic, ci pot exista echilibre Nash multiple.Un exemplu este acela al bătăliei sexelor (care a fost prezentat în paragraful anterior), în care există trei echilibre Nash – două în strategii pure şi unul în strategii mixte, după cum urmează: *(F,F)* , *(T,T)* ,respectiv *((2/3,1/3),(1/3,2/3)).*

Exemplu. Uliul şi porumbelul

Un alt exemplu îl constituie jocul „uliul şi porumbelul", care mai este cunoscut sub numele de "povestea celor doi berbeci". O versiune a sa este astfel: doi berbeci se intâlnesc de o parte şi de alta a unei punţi înguste peste o prăpastie. Ei au la dispoziţie două strategii: fie să încerce să treacă *(T),* fie să aştepte *(A).* Dacă vor încerca să treacă în acelaşi timp (vor juca *T*), atunci se vor întâlni la mijlocul punţii şi se vor lua la bătaie, utilitatea fiecăruia fiind –2. Dacă vor alege amândoi să aştepte, atunci vor avea funcţiile de câştig de valoare 0. Iar în cazul în care unul se hotăreşte să treacă, iar celălalt să aştepte, vor câştiga 2 cel care trece , respectiv 1 cel care aşteaptă .

Prezentând jocul sub formă normală , prin matricea câştigurilor avem:

		Berbec 2 *T*	Berbec 2 *A*
Berbec 1	*T*	-1,-1	2,1
	A	1,2	0,0

Figura 2.10

(Acest joc se numeşte uliul şi porumbelul deoarece jucătorul care se hotărăşte să trecă va fi uliul, iar cel care aşteaptă porumbelul). În cazul acestui joc, există tot trei echilibre Nash, două în strategii pure *(T,A)* şi *(A,T)* şi unul în strategii mixte *((1/2,1/2),(1/2,1/2)).*

Dacă berbecul 1 joacă cu probabilitatea x strategia T, iar berbecul 2 joacă strategia T cu probabilitatea y, atunci pentru ca berbecul 1 să fie indiferent între a trece şi a aştepta câştigurile estimate medii trebuie să fie aceleaşi., adică:

$$(-1)\cdot y + 2(1-y) = 1\cdot y + 0\cdot(1-y) \quad \text{şi } p_1 + p_2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2-3y = y \quad \Rightarrow \quad y = 1/2$$

Pentru berbecul 2 obţinem acelaşi rezultat şi deci echilibrul în strategii mixte este dat de credinţele ambilor jucători că celălalt trece puntea cu probabilitatea 0,5.

In cazul în care doi jucători se întâlnesc pentru prima dată pentru a juca jocul „uliul şi porumbelul",atunci este dificil de „văzut" care este soluţia aleasă de către jucători.Dacă l-au mai jucat înainte, atunci există posibilitatea de a „prezice" care din echilibre va fi ales.

În 1960, s-a elaborat o *„ teorie a punctelor focale",* în care se sugerează că în situaţiile particulare de „viaţă reală", jucătorii pot fi capabili să-şi coordoneze acţiunile pentru atingerea unui echilibru particular utilizând numai informaţiile din jocul descris.De exemplu, „numele" strategiei poate avea o *„putere focală".* Dacă vom cere ca doi jucători să stabilească o oră de întâlnire, facând alegerea orei simultan, atunci este foarte probabil să aleagă ora 12^{00}.Această oră poate fi un *„punct focal*”, în timp ce ora 14^{37} nu poate fi.

Un alt exemplu: dacă vom cere ca doi sau mai mulţi jucători să aleagă simultan o celulă din cadrul unei matrice, atunci este foarte probabil să fie aleasă celula (1,1) (cea din stânga ,sus), acesta constituind un punct focal, în timp ce celelalte celule ale matricei nu sunt.

O altă problemă la care trebuie să răspundem este următoarea: care este legătura dintre echilibrele de tip Nash şi optimul Pareto? (Reamintim că optimul Pareto reprezintă acea situaţie în care jucătorii sunt maxim posibil satisfăcuţi, sau situaţia în care nu există o altă posibilitate în care măcar unul dintre jucători să fie mai bine satisfăcut, fără să se reducă satisfacţia măcar a unuia dintre ceilalţi jucători.)

In cazul „dilemei prizonierului” descrisă anterior,am văzut că echilibrul jocului îl constituie perechea de situaţii *(A,A)* (adică ambii jucători se acuză reciproc), în timp ce optimul Pareto al jocului este de a juca *(N,N)* ($(-1,-1) > (-7,-7)$).

Deci în cazul în care prizonierii nu cooperează, ei nu vor atinge optimul Pareto.

Există posibilitatea de a juca optimul Pareto al jocului, aceasta în cazul în care jucătorii ar coopera (o soluţie ce poate fi dată şi de teoria coaliţiilor), sau în cazul în care există o „ameninţare”. (Jocurile cu „ameninţări” vor fi abordate mai târziu).

Rezumând, în cazul unui joc, echilibrul Nash (sau echilibrele Nash) existent nu este în mod necesar şi optimul Pareto al acestuia. Unele echilibre „par” mai probabile decât altele în cazul unui joc, iar acestea sunt numite „puncte focale”.

2.5. Existenţa echilibrului Nash

În paragraful anterior, am definit echilibrul de tip Nash şi am arătat modul în care poate fi determinat. Întrebarea care se impune în continuare este următoarea: în ce condiţii există un echilibru de tip Nash? Răspunsul la această întrebare este dat de teorema lui Nash:

Teorema Nash Orice joc finit sub formă normală are un echilibru în strategii mixte.

Observaţie. În cazul în care găsim un echilibru în strategii pure, el poate fi asimilat unui echilibru în strategii mixte, în care probabilităţile de realizare ale tuturor strategiilor sunt 0, mai puţin strategia care constituie echilibrul, care va avea probabilitatea de realizare 2.

Demonstraţie

Ideea acestei demonstraţii este de a aplica teorema de punct fix a lui Kakutani pentru funcţiile de reacţie (funcţiile care indică cel mai bun răspuns) ale jucătorilor. Fie $r_i : S \to S$ funcţia de reacţie a jucătorului *i* definită pe spaţiul strategiilor cu valori în acelaşi spaţiu. Un punct fix al lui *r* este definit astfel: acea strategie (mixtă) *s* astfel încât, pentru fiecare jucător *i*, $s = r(s)$.

Observaţie. Corespondenţa *r(s)* este definită ca fiind:

$$r(s) = \arg\max_{s_i \in S_i} \; u_i\left(s_1^*, .. s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, .., s_I^*\right)$$

Această strategie reprezintă chiar echilibrul Nash al jocului.

Teorema de punct fix a lui Kakutani (descrisă în condiţiile jocului) afirmă următoarele:

Teorema Kakutani

Fie $r : S \to S$ o corespondenţă, astfel încât descrie funcţiile de reacţie ale jucătorilor, astfel încât:
a) *S* este o mulţime compactă, convexă şi nevidă din spaţiul euclidian (finit dimensional);
b) *r(s)* este continuă $\forall s \in S$;
c) *r(s)* este convexă $\forall s \in S$;
d) *r(s)* este închisă, adică $\forall$ şirul $(s_n, \hat{s}_n)$, cu $\hat{s}_n = r(s_n)$, avem $(s_n, \hat{s}_n) \to (s, \hat{s})$

Atunci există un punct fix al corespondenţei *r(s):* $\hat{s} \in r(s)$.

În continuare vom verifica dacă aceste condiţii sunt satisfăcute:

a) Cum $S = \times S_i$ şi reprezintă un simplex n- dimensional, ştim că această mulţime este compactă,convexă şi nevidă.

b) Fiecare funcţie de câştig a jucătorilor este liniară în raport cu probabilităţile asociate startegiilor jucate, deci este continuă. Cum funcţiile de câştig sunt continue, şi r(s), care este determinata ca fiind argumentul care maximizează funciile de câştig este continuă.

c) Să presupunem că $r(s)$ nu este convexă.Atunci $\exists s' \in r(s)$, $s'' \in r(s)$ şi $\lambda \in (0,1)$ astfel încât : $\lambda \cdot s' + (1-\lambda)s'' \notin r(s)$.

Dar pentru fiecare jucător *i* avem :

$$u_i\left(\lambda\, s_i' + (1-\lambda)\, s_i'', s_{-i}\right) = \lambda\, u_i\left(s_i', s_{-i}\right) + (1-\lambda) u_i\left(s_i'', s_{-i}\right)$$

deci atât s_i' cât şi s_i'' sunt cele mai bune răspunsuri pentru s_{-i} , iar combinaţia liniară a acestora constituie de asemenea cel mai bun răspuns, deci aparţine lui *r(s).*

În aceste condiţii, presupunerea făcută este falsă şi deci *r(s)* este convexă.

d) Vom demonstra şi condiţia d) prin reducere la absurd. Presupunem că ipoteza d) nu este îndeplinită, adică există un şir $(s_n, \hat{s}_n) \to (s, \hat{s})$, cu $\hat{s}_n \in r(s_n)$, dar $\hat{s} \notin r(s)$. Atunci $\hat{s}_i \notin r_i(s)$ pentru cel puţin un jucător i şi ca urmare există $\varepsilon > 0$ şi un s_i' astfel încât:

$$u_i(s_i', s_{-i}) > u_i(\hat{s}_i, s_{-i}) + 3\varepsilon .$$

Cum u_i este continuă , iar $(s_n, \hat{s}_n) \to (s, \hat{s})$, pentru n suficient de mare avem:

$$u_i(s_i', s_{-i}) > u_i(s_i', s_{-i}) - \varepsilon > u_i(\hat{s}_i, s_{-i}) + 2\varepsilon > u_i(\hat{s}_{n,i}, s_{n,-i}) + 3\varepsilon$$

Deci s_i' este strict mai bună decât $s_{n,-i}$ şi decât $\hat{s}_{n,i}$ şi aceasta contrazice ipoteza că $\hat{s}_{n,i} \in r_i(s_n)$, deoarece aceasta înseamnă că există o altă strategia care asigură un câştig mai mare care nu face parte din *r(s)*. Prin urmare ipoteza este falsă, deci *r(s)* este inchisă.

Cum avem verificate condiţiile a),b),c), d), r(s) are un punct fix, deci există un echilibru de tip Nash pentru jocul considerat. q.e.d.

Un rezultat mai puternic a fost dat de Debreu(1952), prin următoarea teoremă:

Teorema Debreu Fie un joc sub formă normală în care spaţiul strategiilor S_i este o mulţime nevidă, compactă şi convexă şi aparţine unui spaţiu euclidian (nu neapărat finit). Dacă funcţiile de câştig u_i sunt continue în S şi cvasi-concave în S_i atuci există un echilibru Nash în strategii pure.

Demonstraţia este similară celei anterioare, dar în acest caz rezultă că echilibrul Nash există nu neapărat în strategii mixte, ci şi în strategii pure.

O problemă ce poate apare aici este interpretarea echilibrului în strategii mixte. Ce reprezintă acest echilibru? Dacă în strategii pure descrierea acestui echilibru este suficient de clară – ea reprezintă strategia ce trebuie aleasă asfel încât să se maximizeze funcţia de câştig (sau utiliatea) jucătorilor – un echilibru în strategii mixte este mai dificil de înţeles.Cum se alege o strategie mixtă în condiţii practice? Aici apare acea doză de incertitudine datorată probabilităţilor de alegere a uneia sau alteia din strategii (pentru că, în final, se va juca o strategie pură şi nu una mixtă!). Conceptul de strategie mixtă ne ajută însă în a determina punctul de echilibru, respectiv optimul unui joc. Apoi, alegerea uneia sau alteia din strategii se va face în funcţie de cât de apropiată este de strategia mixtă optimală – în cazul în care avem de-a face cu strategii exprimate în formă discretă.

Problema este rezolvată în cazul unor strategii sub formă continuă (aşa cum ne asigură şi teorema anterioară), în acest caz determinându-se cu precizie strategiile ce trebuie adoptate pentru a se realiza maximizarea câştigului.

În cazul în care avem un joc al cărui soluţie poate fi determinată prin algoritmul de determinare iterativă prin eliminarea strategiilor dominate, atunci echilibrul este şi unic. Aceasta poate fi rezumat în următoarea propoziţie:

Propoziţie

Într-un joc cu n jucători sub formă normală, $G = \{S_1,...,S_n; u_1,...,u_n\}$ dacă există un echilibru obţinut prin eliminarea strategiilor strict dominate atunci acesta este unicul echilibru Nash al jocului.

Demonstraţie

Vom demonstra această propoziţie prin reducere la absurd.

Fie $\left(s_1^*, s_2^*,...,s_n^*\right)$ strategiile ce alcătuiesc echilibrul jocului prin eliminarea strategiilor strict dominate.Să demonstrăm mai întâi că acesta este echilibrul Nash al jocului. Cum strategiile s_i^* au fost alese prin algoritmul de eliminare a strategiilor dominate,rezultă că oricare ar fi o altă strategie s_i aleasă de jucătorul i, este satisfăcută condiţia:

$$u_i\left(s_i, s_{-i}^*\right) < u_i\left(s_i^*, s_{-i}^*\right).$$

Cu alte cuvinte, strategia s_i^* este cel mai bun răspuns al jucătorului i la alegerea de către ceilalți a strategiilor s_{-i}^* şi deci strategia s_i^* reprezintă soluția problemei:

$$\max_{s_i \in S_i} u_i\left(s_i, s_{-i}^*\right),$$

soluție care este echilibrul Nash al jocului.

Deci această soluție este un echilibru Nash.

Să verificăm acum unicitatea unui asemenea echilibru. Vom presupune că nu este unicul echilibru Nash al jocului.Ca urmare, există şi o altă strategie $s_i' \neq s_i^*$, astfel încât aceasta este soluția problemei de maximizare:

$$\max_{s_i \in S_i} u_i\left(s_i, s_{-i}^*\right),$$

dar de aici rezultă că $\forall s_i \in S_i$,

$$u_i\left(s_i, s_{-i}^*\right) \leq u_i\left(s_i', s_{-i}^*\right).$$

Deci şi

$$u_i\left(s_i^*, s_{-i}^*\right) \leq u_i\left(s_i', s_{-i}^*\right) \qquad (*)$$

Cum însă strategia s_i^* a fost determinată astfel încât:

$$u_i\left(s_i^*, s_{-i}^*\right) > u_i\left(s_i, s_{-i}^*\right),\ \forall s_i \in S_i\ , \qquad (**)$$

deci şi pentru $s_i = s_i'$, rezultă o contradicție între (∗) şi (∗∗).

Deci presupunerea făcută este falsă şi nu există un alt echilibru în strategii dominante, ceea ce era de demonstrat.

Observații.

a) pentru jocurile în care strategiile sunt dintr-un spațiu discret, dacă există un echilibru în strategii pure unic, atunci acel echilibru poate fi determinat prin algoritmul maximizării câştigurilor relative. În plus, toate echilibrele în strategii pure pot fi determinate prin acest algoritm.

b) Dacă nu poate fi determinat echilibrul prin algoritmul maximizării cîştigurilor relative, atunci pentru jocul considerat există doar echilibre (sau echilibru) în strategii mixte.

2.6 Aplicații

2.6.1 Duopolul Cournot

În 1838 Cournot a anticipat definiția dată da Nash echilibrului jocului şi a elaborat modelul duopolului care îi poartă numele.

Modelul este următorul: pe piața unui produs omogen există două firme care îl pot produce. Fie q_1 şi q_2 cantitățile din bun produse de firma 1, respectiv de firma 2. Funcția inversă de cerere pentru produs este dată prin:

$$p(Q) = \begin{cases} a - Q, & pentru \quad Q < a \\ 0 & pentru \quad Q \geq a \end{cases}, \text{ cu } a > 0.$$

p reprezintă prețul bunului, iar $Q = q_1 + q_2$ este cantitatea totală de bun oferită pe piață.

Costul total al producerii cantității q_i de produs de către firma i este $C_i(q_i)=c\cdot q_i+C_i$, unde c reprezintă costul marginal (consum pentru ambele firme) iar C_i costul fix.

(Evident, vom presupune că atât c cât şi C_i sunt mai mici decât a, altfel problema nu are sens).

În cazul modelului Cournot ambele firme aleg simultan cantitățile pe care le oferă pe piață.

Pentru a determina echilibrul Nash al acestui joc să îl transformăm într-un joc sub formă normală. Pentru aceasta va trebui să specificăm:

a) jucătorii – care sunt cele două firme
b) strategiile disponibile pentru fiecare jucător – cantitățile alese de fiecare din marfa considerată pentru a fi produse
c) câştigul obținut de fiecare jucător – care vor fi reprezentate prin profiturile asociate.

Spațiul strategiilor $S_i = [0,\infty)$, adică spațiul numerelor reale nenegative, deoarece în mod uzual cantitățile q_i sunt nenegative $q_i \geq 0$. (Evident, aceste cantități nu pot fi infinite şi ca urmare se poate face încă o restrângere a acestui spațiu, dar aceasta nu este esențială în rezolvarea problemei).

Câştigurile fiecărui jucător , fiind profiturile înregistrate, vor avea următoarea formă:

$$u_i(q_i, q_j) = q_i\left[p(q_i + q_j) - c\right] = q_i\left[a - q_i - q_j - c\right] - C_i \forall i = 1{,}2$$

Dacă perechea de strategii $\left(q_1^*, q_2^*\right)$ este un echilibru Nash, atunci pentru fiecare jucător i $u_i\left(q_i^*, q_j^*\right) \geq u_i\left(q_i, q_j^*\right)$. Sau echivalent, fiecare jucător trebuie să rezolve următoarea problemă de maximizare: $\max\limits_{q_i \in S_i} u_i\left(q_i, q_j^*\right)$.

Pentru modelul nostru , problema va fi :

$$\max_{0 \leq q_i} u_i\left(q_i, q_j^*\right) = \max_{0 \leq q_i} q_i\left[a - \left(q_i + q_j^*\right) - c\right] - C_i, i = 1{,}2$$

Condițiile de ordin întâi pentru aceasta problemă conduc la :

$$\frac{\partial u_i\left(q_i, q_j^*\right)}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow q_i^* = \frac{1}{2}\left(a - q_j^* - c\right).$$

Deci cantităţile $\left(q_1^*, q_2^*\right)$ care reprezintă echilibrul Nash sunt:

$$\begin{cases} q_1^* = \frac{1}{2}\left(a - c - q_2^*\right) & (X) \\ q_2^* = \frac{1}{2}\left(a - c - q_1^*\right) & (Y) \end{cases}$$

Din rezolvarea sistemului de ecuaţii rezultă : $q_1^* = q_2^* = \frac{(a-c)}{3}$ iar profitul fiecărei firme asociat va fi: $u_i\left(q_i^*, q_j^*\right) = \frac{(a-c)^2}{9} - C_i$, evident dacă $q_i^* + q_j^* < a$, adică dacă $a > 2c$.

Cum se poate explica un astfel de rezultat ? Intuiţia este simplă: dacă cele două firme nu sunt în condiţii de concurenţă, atunci ele se pot comporta ca nişte monopolişti. În acest caz problema ce trebuie rezolvată va fi : $\max\limits_{q_i} u_i\left(q_i, 0\right)$, pentru fiecare dintre aceştia, ceea ce conduce la cantitatea de monopol $q_m = \frac{a-c}{2}$, iar profitul asociat ar fi $u_i\left(q_m, 0\right) = \frac{(a-c)^2}{4}$.

Cum există două firme , această cantitate se va diviza în două , adică $q_i = q_m / 2$, pentru fiecare i, cantitate mai mică decât în cazul anterior, dar care aduce un profit mai mare pentru fiecare firmă : $q_i = \frac{a-c}{4}$, $u_i\left(q_i, q_j\right) = \frac{(a-c)^2}{8}$.

În acest caz - dacă firmele nu se înţeleg între ele – atunci fiecare are interesul de a devia de la această strategie – adică de a produce mai mult în dezavantajul celuilalt (Se poate observa uşor că o alegere $q_i = q_m / 2$ nu este cel mai bun răspuns al jucătorului i dacă jucătorul j alege $q_j = q_m / 2$). Aici cantităţile de mărfuri oferite vor creşte din partea fiecărei firme până la nivelul $q_i = (a-c)/2$.

Aceasta este soluţia algebrică a problemei. Dar se poate determina şi o soluţie grafică după cum urmează:

Ecuaţiile (X) şi(Y) dau forma funcţiei de răspuns al fiecărui jucător la alegerea făcută de oponent şi atunci :

$$R_2(q_1) = \frac{1}{2}\left(a - q_1 - c\right) \qquad \text{dac ă} \qquad q_1 < a - c$$

$$R_1(q_2) = \frac{1}{2}\left(a - q_2 - c\right) \qquad \text{daca} \qquad q_2 < a - c$$

unde R_1 şi R_2 sunt funcţiile de ”cel mai bun răspuns” pentru firmele 1 şi 2.

În figura 2.11 se prezintă rezolvarea, cu determinarea punctului de echilibru $\left(q_1^*, q_2^*\right)$.

O a treia modalitate de a determina echilibrul Nash al jocului este aceea de a elimina strategiile strict dominate . Acest mod de rezolvare îl vom lăsa la latitudinea cititorului.

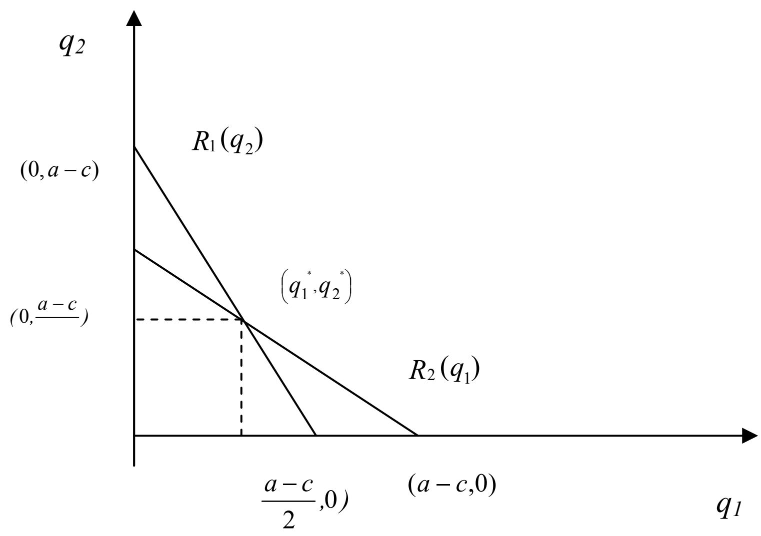

Figura 2.11

2.6.2. Duopolul Bertrand

In anul 1883 Bertrand a propus un alt model pentru comportamentul a 2 firme care se află pe o aceeaşi piață (cazul duopolului Bertrand). În acest caz vom presupune că cei doi jucători sunt două firme care produc pentru o piață 2 produse diferite, dar care pot fi substituibile. Funcțiile de cerere ale consumatorilor sunt date prin relația :

$$q_i(p_i,p_j)=a-p_i+bp_j$$

($b>0$ arată că cele 2 produse sunt substituibile iar $b>0$ arată că cele două produse sunt complementare).

Spațiul strategiilor celor doi jucători este dat de sensul dat de alegerea prețurilor la care vor vinde cele 2 produse şi nu a cantităților – ca în cazul duopolului Cournot . Aducând jocul sub formă normală avem :

- 2 jucători – reprezintă cele două firme;
- spațiul strategiilor – dat de alegerea prețurilor p_i, p_j cu $S_i=[0,\infty)$;
- funcțiile de câştig - care vor fi profitul realizat de cele 2 firme, în cazul în care costul total este dat prin $C_i(q_i)=cq_i$ (presupunem de această dată că nu avem cost fix , iar costul marginal este acelaşi pentru ambele firme).

Atunci perechea (p_1^*,p_2^*) este un echilibru Nash al jocului considerat (în care firmele aleg simultan prețul de desfacere) dacă fiecare firmă rezolvă următoarea problemă de maximizare:

$$\max_{p_i\geq 0} u_i(p_i,p_j^*)=\max_{p_i\geq 0}\left[a-p_i+bp_j^*\right](p_i-c)$$

Din condițiile de ordin întâi rezultă:

$$\frac{\partial u_i(p_i,p_j^*)}{\partial p_i}=0\Rightarrow p_i^*=\frac{1}{2}\left(a+bq_j^*+c\right)$$

Deci perechea de prețuri (p_i^*,p_j^*) va satisface sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} p_1^* = \frac{1}{2}\left(a + b\, p_2^* + c\right) \\ p_2^* = \frac{1}{2}\left(a + b\, p_1^* + c\right) \end{cases}$$

şi de aici , soluţia problemei: $p_1^* = p_2^* = \frac{(a+c)}{2-b}$.

(Observăm că această problemă are soluţie doar dacă $b < 2$, altfel vom obţine preţuri negative) .

Analog cu situaţia anterioară putem determina şi grafic echilibrul Nash al jocului.
Considerând funcţiile care dau cel mai bun răspuns al fiecărui jucător:

$$R_1(p_2) = \frac{1}{2}\left(a + b\, p_2 + c\right)$$

$$R_2(p_1) = \frac{1}{2}\left(a + b\, p_1 + c\right)$$

Reprezentând grafic aceste funcţii obţinem figura 2.12:

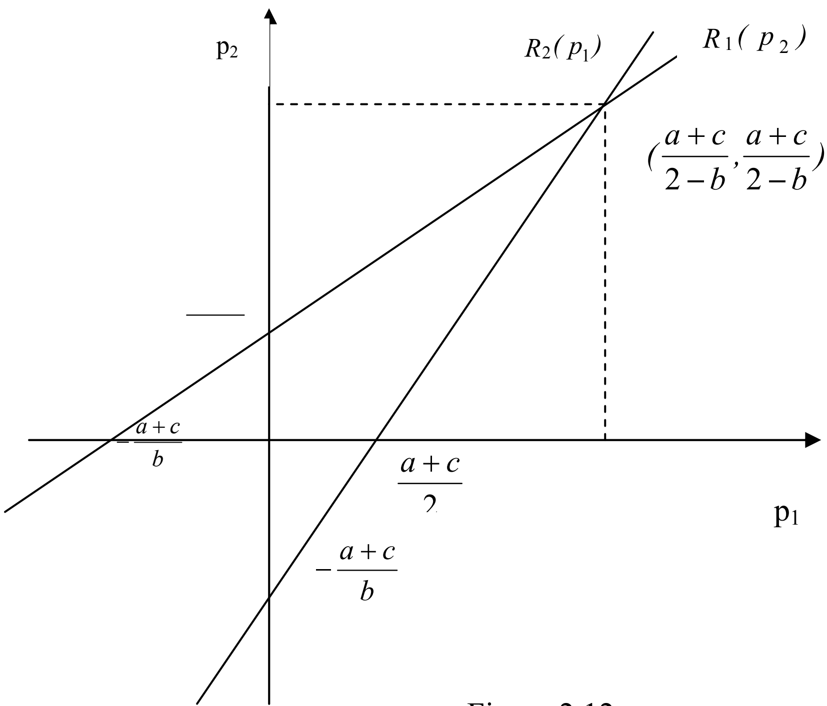

Figura 2.12

2.6.3. Modelul Hottelling

Acest model a fost propus de Hottelling în 1929. El a presupus că intr-un oraş există două magazine, situate la cele 2 extremităţi . (Pentru uşurinţa calculelor vom presupune că distanţa dintre cele 2 magazine este 1). Fiecare din magazine vinde aceleaşi produse. Cumpărătorii sunt situaţi între cele 2 magazine şi vom presupune că au o distribuţie uniformă de densitate 1 în acest interval. Să presupunem că primul magazin se află situat la coordonata $x = 0$ iar cel de-al doilea la $x = 1$. Costul unitar al mărfurilor din fiecare magazin este c.

Pentru consumatori va mai exista un cost suplimentar datorat transportului astfel încât costul total pentru consumatori va fi $C = c + t$, unde t este costul transportului. Ei vor cumpăra mărfuri de la unul din magazine doar dacă realizează un minim de cheltuieli C şi dacă nu depăşesc venitul disponibil R .

Cererea pentru magazinul i va fi dată de numărul de consumatori ce cumpără de la acest magazin (presupunând că fiecare cumpărător a cumpărat o unitate de marfă la preţul p_i) . Figurând acest joc sub formă normală avem:

- jucătorii – cele două magazine
- strategiile – preţurile pe care le aleg p_i, p_j ;
- funcţiile de câştig sunt date de profitul magazinelor.

Cum $D_1(p_1, p_2) = X$ - funcţia de cerere pentru magazinul 1, iar $D_2(p_1, p_2) = 1 - D_1(p_1, p_2)$ alegerea consumatorilor se va face astfel încât:

$$p_1 + tx = p_2 + t(1-x)$$

(cheltuielile pentru achiziţionarea bunurilor sunt egale, indiferent da magazinul către care se vor orienta) şi de aici rezultă relaţiile:

$$D_1(p_1, p_2) = \frac{p_2 - p_1 + t}{2t} \qquad D_2(p_1, p_2) = \frac{p_1 - p_2 + t}{2t}$$

În acest caz perechea $\left(p_1^*, p_2^*\right)$ (echilibrul Nash al jocului) se obţine din rezolvarea problemei:

$$\max_{p_i \ge 0} U_i\left(p_i, p_j^*\right) = \max_{p_i \ge 0} (p_i - c) * D_i\left(p_i, p_j^*\right) \text{ cu } c + t \le R$$

Condiţiile de ordinul întâi conduc la soluţia :

$$p_i^* = \frac{1}{2}\left(q_j^* - c - t\right) \quad \text{şi de aici la}$$

$$p_1^* = p_2^* = c + t \text{ dacă } c + \frac{3t}{2} \le R$$

2.6.4. Votul majoritar

Fie 3 jucători care au la dispoziţie 3 alternative de vot: A , B şi C . Aceşti jucători votează simultan pentru una din alternative, deci spaţiul strategiilor va fi $S_i = \{A, B, C\}$.
Va câştiga alternativa cu cele mai multe voturi, iar dacă nu există o asemenea alternativă atunci va fi aleasă varianta A. Jucătorii nu se pot abţine de la vot . Funcţiile de câştig pentru cei 3 jucători sunt:

$$U_1(A) = U_2(B) = U_3(C) = 2$$
$$U_1(B) = U_2(C) = U_3(A) = 1$$
$$U_1(C) = U_2(A) = U_3(B) = 0$$

Pentru acest joc există trei echilibre în strategii pure: A , B respectiv C . Totuşi mai există şi alte echilibre . Dacă jucătorii 1 şi 2 vor vota B , atunci oricare ar fi votul jucătorului 3 acesta nu va influenţa echilibrul, care va fi B . Deci şi strategiile (B,B,B) respectiv (B,B,C) sunt echilibre Nash ale jocului (observăm că (B,B,A) nu este echilibru Nash deoarece dacă jucătorul 3 votează A, atunci jucătorul 1 va prefera şi el să voteze A deoarece poate obţine un câştig mai mare).

2.6.5. “Tragedia” bunurilor comune (publice)

Acest joc a fost propus pentru prima dată de David Hume (1739) care şi-a pus problema modului în care reacţionează oamenii în privinţa unor bunuri care aparţin comunităţii (bunuri comune sau bunuri publice). Vom presupune că într-un sat sunt n crescători de oi care au la dispoziţie pentru creşterea lor o păşune comunală . Fie x_i numărul de oi pe care le deţine fiecare crescător (jucător). Atunci $X = \sum_{i=1}^{n} x_i$ va fi numărul total de oi din sat. Costul unei oi – care va include cheltuielile pentru cumpărarea şi creşterea sa – îl vom nota cu c, care este independent de numărul de oi deţinute de fiecare dintre ei (acesta poate fi privit şi ca un cost marginal, egal pentru toţi jucătorii).

Cum preţul unei oi se va stabili pe piaţa liberă, el va depinde de numărul total de oi existente şi fie acest preţ $V(X)$. Pentru creşterea unei oi este necesară o anumită cantitate de iarbă, iar cantitatea totală de iarbă este limitată de dimensiunea păşunii, şi în acest caz există un număr maxim de oi ce poate fi crescut pe acea păşune, X_{max}.

În acest caz : $\begin{array}{l} V(X) > 0 \quad dacă \quad X < X_{max} \\ V(X) = 0 \quad daca \quad X \geq X_{max} \end{array}$

(Cu alte cuvinte, atâta timp cât sunt suficient de puţine oi, ele se pot dezvolta în voie, dar în momentul în care sunt prea multe $X > X_{max}$ atunci nu mai există suficientă mâncare pentru nici una şi nu mai pot supravieţui). În mod formal, aceasta se poate exprima astfel:

$$V'(X) < 0 \quad ş \quad V''(X) < 0 \quad pentru \quad X < X_{max} \quad (*)$$

Primăvara fiecare crescător va alege numărul de oi pe care îl va creşte (Să presupunem că acest număr este perfect divizibil pentru uşurinţa calculelor) . Atunci spaţiul strategiilor ar putea fi obţinut ca numărul de oi ce va fi ales , evident un număr pozitiv între $0\ si\ \infty \Rightarrow x_i \in [0,\infty)$. (Cum însă fiecare ştie care este X_{max}, numărul maxim de oi ce este suportat de păşune, $x_i \in [0, x_{max})$ în realitate . Funcţia de câştig a jucătorului i va fi dată de preţul ce îl poate obţine din vinderea oilor minus costul creşterii acestora : $U_i(x_i) = x_i V(x_i) - c x_i$.

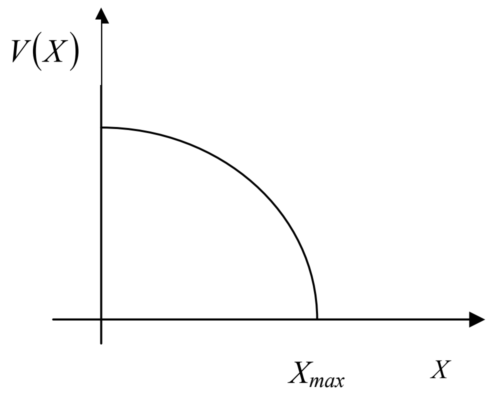

Figura 2.13

Atunci pentru a obţine echilibrul Nash al acestui joc (x_i astfel încât fiecare jucător să obţină utilitatea maxim posibilă) va trebui să rezolve problema : $\max\limits_{x_i \in [0, X_{max})} u_i\left(x_i, x_{-i}^*\right)$ $(**)$ pentru fiecare jucător *i*. Condiţiile de ordin I vor conduce la relaţia :

$$V\left(x_i, x_{-i}^*\right) + x_i V'\left(x_i, x_{-i}^*\right) - c = 0 \quad \left(\forall i = \overline{1,n}\right) \quad (***)$$

de unde rezultă x_i^* . Adunând pentru toţi jucătorii relaţia $(***)$ obţinem:

$$nV\left(X^*\right) + X^* V'\left(X^*\right) - nc = 0 \quad \left(X^* = \sum_{i=1}^{n} x_i^*\right)$$

sau echivalent: $V\left(X^*\right) + \dfrac{X^* V'\left(X^*\right)}{n} - c = 0 \quad (a)$.

Relaţia ne dă optimul individual în condiţiile jocului descris anterior . În contrast cu acesta să calculăm optimul social, adică optimul la nivelul întregii colectivităţi . Pentru aceasta va trebui să rezolvăm problema :

$$\max\limits_{0 \le X \le \infty)} XV(X) - Xc \quad .$$

Condiţia de ordin I pentru aceasta conduce la soluţia : $V\left(X^{**}\right) + X^{**} V'\left(X^{**}\right) - c = 0 \quad (b)$ cu X^{**} soluţia acestei ecuaţii. Comparând a) cu b) se observă că $X^* > X^{**}$.

Să presupunem că nu este aşa . Atunci $X^* < X^{**}$ iar $V\left(X^*\right) \ge V\left(X^{**}\right)$ deoarece $V' < 0$. În plus , $0 > V'\left(X^*\right) \ge V'\left(X^{**}\right)$ deoarece şi $V'' < 0$. De aici rezultă că $\dfrac{X^*}{n} < X^{**}$ adică partea stângă din a) este strict mai mare decât partea stângă din b) ceea ce este imposibil, ambele fiind egale cu zero. Deci presupunerea făcută este falsă şi $X^* > X^{**}$.

În cazul acestui joc observăm că jucătorii nu vor alege strategia care să conducă la optimul social , adică situaţia optimă pentru comunitate . Ei vor fi tentaţi să crească mai multe animale decât nivelul optim, în acest fel reducându-se şi bunăstarea lor .

2.6.6. Jocul inspecţiei

În cazul acestei aplicaţii vom arăta că echilibrul Nash poate să nu existe în strategii pure, dar există în strategii mixte. Această situaţie se poate aplica în diverse situaţii cum ar fi inspecţia armelor (în armată, pentru ca soldaţii să păstreze armele curate), prevenirea crimelor, controalele financiare sau în supravegherea muncitorilor şi incitarea lor la o muncă. Vom descrie jocul astfel: un muncitor (jucătorul 1) lucrează pentru un patron (jucătorul 2). Muncitorul poate fie să muncească (M) fie să chiulească (C), acestea fiind strategiile pe care le are la dispoziţie.

Patronul poate fie să vină în inspecţie (I) fie să nu vină (NI). În cazul în care vine în inspecţie, patronul poate avea evidenţa clară a modului în care lucrează muncitorii săi, dar este costisitor, adică îl va costa h . Patronul va plăti salariul w muncitorului mai puţin în cazul în care îl prinde chiulind, caz în care îi taie ziua de muncă, deci muncitorul va primi 0. (Nu îl poate obliga să plătească amendă, dar îl poate sancţiona prin neplata acelei zile de muncă).

Pentru muncitor "costul" unei zile de muncă este c, iar în cazul în care munceşte, produce valoarea v pentru patron. Pentru simplificare să presupunem că $c > h > 0$ şi că $w > c$ (altfel nu are sens să muncească).

Jocul sub formă normală este prezentat în figura 2.14:

			P	
			y	1-y
			I	NI
M	x	C	0,-h	w,-w
	1-x	M	w-c,v-w-h	w-c,v-w

Figura 2.14

Observăm uşor că acest joc nu are un echilibru în strategii pure (Dacă patronul nu va inspecta atunci muncitorul preferă să chiulească . Dacă patronul decide să inspecteze, iar muncitorul ştie aceasta , atunci este mai bine să muncească . Patronul în schimb , ştiind acest lucru – adică faptul că muncitorul preferă să muncească – este mai câştigat dacă nu face inspecţia) . În acest caz patronul trebuie să aleagă o strategie mixtă , fie x probabilitatea ca muncitorul să chiulească şi y probabilitatea ca patronul să inspecteze. În figura (*) este reprezentată situaţia . Muncitorul este indiferent dacă munceşte sau chiuleşte în cazul în care :

$$y*0+(1-y)*w = y*(w-c)+(1-y)*(w-c) \text{ adică } y*w = c \Rightarrow y = \frac{c}{w} \quad (*) .$$

El este indiferent între a chiuli şi a munci dacă valoarea câştigului din a chiuli (c) este egală cu pierderea de venit $y*w$.

Patronul este indiferent între a inspecta şi a nu inspecta dacă :

$$x*(-h)+(1-x)(v-w-h) = x*(-w)+(1-x)*(v-w) \text{ adică } x*w = h \Rightarrow x = \frac{h}{w} \quad (**)$$

Pentru patron, dacă este indiferent între a inspecta sau a nu inspecta, atunci costul inspecţiei (h) trebuie să fie egal cu salariul economisit la plata muncitorului $x*w$.

Deci singurul echilibru al jocului considerat este un echilibru în strategii mixte descris prin relaţia : $\left(\left(\frac{h}{w},\frac{w-h}{w}\right),\left(\frac{c}{w},\frac{w-c}{w}\right)\right)$.

Observaţie. Plecând de la acest rezultat se poate calcula şi contractul optimal ce este oferit de patron, adică salariul w ce va maximiza câştigul ataşat al patronului:

$$\max_{w \geq 0} (1-x)v-(1-xy)w-hy .$$

Din rezolvarea acestei probleme rezultă simplu că $w=\sqrt{hv}$ $\left(dacă \sqrt{hv} > c\right)$. Pentru un w dat (w > c) patronul poate alege $y = \frac{c}{w} + \varepsilon$, cu ε arbitrar de mic şi în acest caz muncitorul va munci cu probabilitatea 1, iar pentru patron câştigul (aproximativ) va fi $v - w - \frac{h-c}{w} > v\left(1-\frac{h}{w}\right) - w$.

2.7. Probleme propuse

1.Să se determine echilibrul Nash în cazul jocului descris sub formă normală în următoarea matrice a câştigurilor.

		2: *S*	*M*	*D*
1	*S*	2,0	1,1	4,2
	M	3,4	1,2	2,3
	J	1,3	0,2	3,0

Figura 2.15

2. Doi jocători negociează modul în care să împartă un milion de lei. Ei vor alege simultan suma pe care o doresc şi fie S_1 respectiv S_2 acele sume (evident , $0 \leq S_1, S_2 \leq 1$. Dacă $S_1 + S_2 \leq 1$ atunci jucătorii vor primi sumele cerute iar dacă $S_1 + S_2 > 1$ atunci nu vor primi nimic. Care este echilibrul Nash (în strategii pure) asociat acestui joc?

3. În cazul modelului duopolului Cournot , în care funcția inversă de cerere este $p(Q) = a - Q$, iar firmele au costuri marginale diferite c_1 pentru firma 1 şi c_2 pentru firma 2. Care este echilibrul Nash al jocului dacă $0 < c_i < \frac{Q}{2}$? Dar dacă $c_1 < c_2 < Q$ dar $2c_2 > Q + c_1$?

4. Arătați că în cazul duopolului Bertrand pentru un produs omogen, singurul echilibru Nash posibil al jocului este ca firmele să aleagă prețul egal cu costul marginal .

5. Pentru jocul sub formă normală descris în figura următoare determinați condițiile ca strategia (J, D) să fie unicul echilibru Nash al jocului.

		2: *S*	*D*
1	*S*	a,b	c,d
	J	e,f	g,h

Figura 2.16

6. Să se determine toate echilibrele Nash (în strategii pure şi în strategii mixte) asociate jocului sub forma normală descris în figura 2.17 :

		2: *S*	*M*	*D*
1	*S*	0,0	4,5	5,4
	M	5,4	0,0	4,5
	J	4,5	5,4	0,0

Figura 2.17

7. Arătați că jocul sub formă normală din figură are un echilibru unic, iar acesta este în strategii pure.

		2: *S*	*M*	*D*
1	*S*	1,-2	-2,1	0,0
	M	-2,1	1,-2	0,0
	J	0,0	0,0	1,1

Figura 2.18

8. Determinați echilibrele Nash ale jocului sub formă normală descris prin următoarea matrice a câştigurilor :

		2: S	D
1	S	2,1	0,2
	J	1,2	3,0

Figura 2.19

9. Presupunem că două firme doresc să angajeze câte un muncitor , oferind salarii diferite w_1 şi w_2, astfel încât $\frac{1}{2}w_1 < w_2 < 2w_1$. Presupunem că există doi muncitori care vor cere slujbele . Dacă ambii se adresează unei singure firme , atunci va fi angajat doar unul, la întâmplare, în timp ce al doilea va rămâne şomer. Dacă se adresează fiecare la o altă firmă, atunci vor fi ambii angajați. Sub formă normală jocul este următorul:

		Muncitor 2: Se adresează firmei 1	*Se adresează firmei 2*
Muncitor 1	*Se adresează firmei 1*	$1/2w_2$, $1/2w_1$	w_1, w_2
	Se adresează firmei 2	w_2, w_1	$1/2w_1$, $1/2w_2$

Figura 2.20

Să se determine echilibrul jocului.