CAPITOLUL 2

MODELAREA ACTIVITĂȚII DE DISTRIBUȚIE

2.1 Caracteristicile activității de distribuție

Producătorii de bunuri materiale şi servicii trebuie să decidă asupra celor mai bune modalităţi de a depozita şi de a deplasa către destinațiile de pe piață bunurile şi serviciile pe care le produc. În mod tipic, este necesar ca ei să apeleze la serviciile unor firme de distribuție – depozite şi firme de transport – pentru a fi ajutați la realizarea acestei sarcini. Producătorii ştiu că realizarea în mod eficient a distribuției va avea un puternic impact asupra satisfacției clientului şi asupra costurilor înregistrate de către firmă. Un sistem de distribuție prost poate distruge un produs care, în alte condiții, s-ar fi dovedit foarte bun.

Activitatea de distribuție cuprinde planificarea, implementarea şi controlul fluxurilor fizice de materiale şi produse finite, de la punctele de proveniență ale acestora (producători) la punctele de utilizare (consumatori), astfel încât cerințele clienților să fie satisfăcute şi să se obțină profit.

Scopul distribuției este acela de a crea lanțuri de livrare, adică fluxuri cu valoare adăugată de la furnizori către utilizatorii finali, organizate conform schemei din figura 2.1.

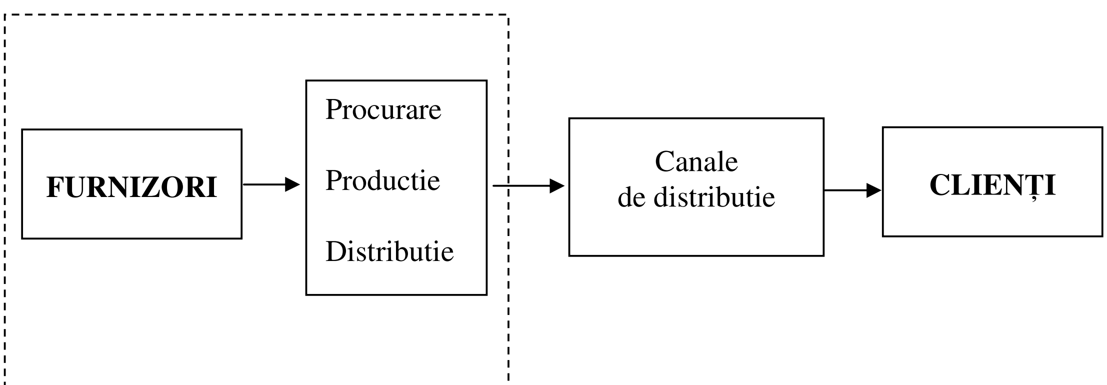

Figura 2.1 Fluxul de valoare adăugată de la furnizori la clienți

Sarcina compartimentului de logistică constă în a coordona activitățile efectuate de furnizori, agenți de achiziție, specialişti în marketing membrii canalelor de distribuție şi clienți.

În timp ce teoria clasică referitoare la distribuție porneşte de la premisa că bunurile se află la producător şi încearcă să identifice soluții de a le pune la dispoziția clienților, cu costuri cât mai mici, specialiştii în marketing preferă teoria cunoscută sub numele de *logistică de piață*, care analizează problema în sens invers, pornind de la situația de pe piață şi ajungând în final la situația din fabrică.

Este clar că gândirea logistică nu pune doar problema distribuției spre exterior (adică a bunurilor care se mişcă de la fabrică la clienți), ci şi problema distribuției spre interior (adică a bunurilor care se mişcă de la furnizori la fabrică). În cadrul firmelor situate pe poziții de frunte din punct de vedere al logisticii, directorii de distribuție controlează atât distribuția spre interior, cât şi distribuția spre exterior.

De regulă, firmele îşi coordonează lanțurile de distribuție cu ajutorul informațiilor. Creşteri majore ale eficienței logisticii s-au înregistrat ca urmare a progreselor realizate în tehnologia informațiilor, în special datorită apariției calculatoarelor electronice, terminalelor de calculator situate în punctele de vânzare, codificării unitare a produselor, urmăririi prin satelit, transferului electronic de date şi transferul electronic de fonduri. Aceste progrese au dat posibilitatea firmelor să facă sau să respecte promisiuni de genul: “produsul va fi livrat mâine la orele 10 a.m.” şi să țină sub control onorarea acestor promisiuni prin intermediul informațiilor.

În cadrul distribuției distingem două mari categorii de activități: *transportul* şi *depozitarea*. Dacă privim lucrurile din punct de vedere al unei firme producătoare, ambele activități apar atât în faza de aprovizionare factori de producție, cât şi în faza de desfacere a produselor finite. În ce priveşte firma specializată în distribuție, aceste activități reprezintă însăşi domeniul său de activitate. În perioada actuală conducerile firmelor sunt deosebit preocupate de costul total implicat de realizarea distribuției fizice, cost care, în unele cazuri se poate ridica la 30%-40% din costul produsului. Având în vedere că şi costurile publicitare se ridică la nu mai puțin de 3% din vânzări, este clar că directorii de marketing ar putea fi răsplătiți substanțial dacă ar putea găsi modalitățile de a reduce costurile aferente distribuției. Diminuarea costurilor implicate de activitatea de distribuție va permite firmelor să practice prețuri de vânzare mai mici sau să obțină marje mai mari ale profiturilor.

Principalele elemente ale costului total aferent distribuţiei sunt în viziunea lui Philip Kotler[1)]: transportul (37%), stocarea (22%), depozitarea (21%), prelucrarea comenzilor, serviciile oferite clienţilor şi administrarea distribuţiei (20%). Unii experţi cred că pot fi realizate economii substanţiale în activitatea de distribuţie, domeniu care a fost descris ca "fiind ultima frontieră a economiilor legate de costuri şi continentul neexplorat al economiei".

Distribuţia nu reprezintă numai un cost, ea este şi un instrument puternic în cadrul marketingului concurenţial. Firmele pot atrage clienţi suplimentari oferind servicii mai bune, un ciclu de producţie mai rapid sau preţuri mai mici, toate acestea putând fi realizate ca urmare a îmbunătăţirilor aduse distribuţiei, în timp ce, atunci când nu reuşesc să livreze bunurile la timp, firmele pierd o parte importantă a clienţilor. Menţinerea pe o anumită piaţă, păstrarea clienţilor actuali şi atragerea altora noi poate fi realizată, din punct de vedere al distribuţiei, numai prin îmbunătăţirea continuă a ambelor activităţi specifice: *transportul* şi *depozitarea-stocarea*.

Majoritatea firmelor declară că pentru ele, obiectivul distribuţiei constă în furnizarea bunurilor potrivite, în locurile potrivite, la momentul potrivit, cu costuri minime. Din nefericire, acesta definiţie nu permite o orientare efectivă către rezolvarea problemei. Nici un sistem de distribuţie nu poate realiza simultan maximizarea serviciilor oferite clientului şi minimizarea costului aferent distribuţiei. Un nivel maxim de servicii oferite clientului implică deţinerea de stocuri mari, realizarea unui transport de înalt nivel calitativ şi existenţa a numeroase depozite, toate acestea ducând la creşterea costului distribuţiei. Un cost minim al distribuţiei implică transporturi ieftine, stocuri reduse şi depozite puţine.

Merită remarcat faptul că o firmă nu poate ajunge la eficienţă în realizarea distribuţiei cerând pur şi simplu fiecărui manager să minimizeze costurile proprii, deoarece adesea costurile distribuţiei interacţionează într-o manieră inversă: managerul de transporturi preferă să folosească transportul pe calea ferată în locul celui aerian, deoarece astfel plăteşte mai puţin pentru transport. Dar cum transportul pe calea ferată este mai lent, expedierea mărfurilor cu trenul imobilizează capitalul circulant pentru o perioadă mai lungă, întârzie efectuarea plăţii de către client şi îi poate determina pe clienţi să cumpere de la firmele concurente care oferă servicii mai rapide.

Compartimentul de expediţie utilizează containere ieftine pentru a reduce la minimum costurile legate de expedierea mărfurilor. Acest fapt duce însă la o rată înaltă de depreciere a bunurilor în timpul transportului, ceea ce produce o impresie proastă asupra clienţilor.

[1)] KOTLER, Ph., ***"Managementul marketingului"***, Editura Teora, Bucureşti , 1997.

Coordonatorul activității de stocare preferă să dețină stocuri mici pentru a reduce costurile aferente. Însă această politică duce la înmulțirea situațiilor de lichidare a stocurilor şi de imposibilitate a onorării comenzilor, determină creşterea numărului de documente şi face necesară producerea de serii speciale din anumite produse, precum şi expedierea produselor prin mijloace rapide, cu costuri ridicate.

Dat fiind faptul că activitățile de distribuție implică acceptarea unor compromisuri, deciziile trebuie luate pe baza analizei efectuate asupra sistemului în totalitatea sa.

Punctul de pornire în proiectarea unui sistem eficient de distribuție îl reprezintă studierea a ceea ce doresc clienții şi a ceea ce oferă firmele concurente. Clienții sunt interesați de livrarea bunurilor la timp, de disponibilitatea furnizorilor de a le îndeplini nevoile urgente, de manipulare atentată a mărfurilor de disponibilitatea furnizorilor de a-şi recupera bunurile defecte şi de a efectua repede reaprovizionarea cu alte bunuri precum şi de disponibilitatea furnizorului de a stoca marfa pentru clienți.

Firma trebuie să determine importanța relativă a serviciilor oferite şi, de asemenea, şi standardele serviciilor oferite de firmele concurente. În mod normal ea va dori să ofere cel puțin acelaşi nivel de servicii ca şi concurența, dar obiectivul său este maximizarea profiturilor şi nu a vânzărilor.

Din perspectiva celor două activități principale ale distribuției în capitolul de față am inclus posibilitatea de modelare atât a activității de transport a bunurilor de la furnizori la beneficiari (clienți), cât şi a celei de stocare a factorilor de producție, respectiv produselor finite.

2.2. Optimizarea fluxurilor de materii prime, materiale şi produse finite

În cadrul acestui subcapitol vom prezenta o modalitate prin care poate fi modelată activitatea de deplasare a materiilor prime, materialelor şi a produselor finite de la producătorii acestora la consumatori. Pentru aceasta, considerăm dată o *rețea de transport* în cadrul căreia o cantitate Q dintr-un anumit produs, disponibilă într-un număr de puncte numite *surse* trebuie transportată în alte puncte, numite *destinații*, a căror cerere totală este tot Q. Rețeaua poate conține şi alte puncte prin care produsul este doar în trecere, de unde şi denumirea de *puncte intermediare* sau *de tranzit*. În acest context, principalele probleme de optimizare care se pot formula sunt:

1) Din punct de vedere al ***costului***. Cunoscând costul transportului unei unități de produs între două puncte ale rețelei se doreşte reorganizarea transportului de aşa manieră încât cererile din nodurile destinație să fie satisfăcute la un *cost total minim*. În acest caz,

nu există plafoane în ceea ce priveşte cantitatea transportată pe o rută sau alta. Modelarea matematică a acestui context a condus la *problema generala de transfer* al cărei caz particular îl constituie *problema clasică de transport*.

2) Din punct de vedere ***al posibilităților de transfer*** ale rețelei. De aceasta dată sunt date *capacitățile* de transfer ale diferitelor rute, capacități ce nu pot fi depăşite şi se pune problema dacă rețeaua permite satisfacerea în totalitate a cererilor în punctele de destinație. Nici o referire la cheltuielile implicate de transportul produsului pe diferite rute nu este formulată explicit. În acest caz rezultă o *problemă de flux maxim* în rețea. Dacă valoarea fluxului este egală cu Q atunci cererile sunt integral acoperite, altfel cererile în unele puncte de destinație sunt satisfăcute parțial.

3) Combinarea celor două puncte de vedere formulate anterior se impune, ea fiind serios motivată de practica economică. Mai concret, cunoscând costurile unitare de transport, precum şi capacitățile de transfer ale rutelor se pune *problema de a satisface cât mai bine cererile în punctele de destinație, la un cost total minim.*

1. Formalizarea problemei

Rețelei de transport considerată anterior îi va corespunde un graf $G = (X, E)$, finit, fără bucle, simplu şi neorientat sau parțial orientat (în caz că anumite rute pot fi parcurse într-un singur sens). Mulțimea nodurilor X a grafului se va compune din:

- *surse* a căror mulțime o notăm cu S;
- *destinații* a căror mulțime o notăm cu T;
- puncte *intermediare*.

Fiecare muchie $e = \{i, j\} \in E$ va genera două rute orientate notate (i, j) şi (j, i) corespunzătoare celor două sensuri de parcurgere a muchiei.

Fiecărei rute orientate (i, j) îi vor corespunde:

- o *capacitate* c_{ij} indicând limita superioară a cantității de produse ce pot fi transportate de la i la j;
- un *cost unitar de transport* p_{ij} plătit pentru deplasarea unei unități de produs de la i la j.

În cazul cel mai general, $c_{ij} \neq c_{ji}$ după cum şi costurile de transport pot depinde de sensul de parcurgere a rutei respective.

Fără a restrânge generalitatea considerațiilor anterioare vom putea presupune că orice muchie $\{i, j\}$ a grafului poate fi parcursă în ambele sensuri. Dacă într-un caz concret o anumită rută orientată, să zicem (i, j) este blocată, vom realiza acest lucru impunând un cost unitar de transport foarte mare: $p_{ij} = +\infty$ sau o capacitate de transport nulă, $c_{ij} = 0$.

Convenim ca toate capacitățile rutelor orientate să fie exprimate prin *numere întregi pozitive* ($c_{ij} \in N^*$) şi toate costurile unitare de transport să fie date prin numere *reale nenegative* $p_{ij} \geq 0$.

Pentru fiecare sursă $i \in S$ vom nota cu a_i disponibilul său de produs. Cererea destinației $j \in T$ va fi notată cu b_j .Convenim ca mărimile a_i cu $i \in S$ şi b_j cu $j \in T$ să fie numere *întregi pozitive*.

În plus:

$$Q = \sum_{i \in S} a_i = \sum_{j \in T} b_j \ . \qquad (2.1)$$

Introducem în graful G următoarele elemente noi:

- un nod ***s*** si rutele orientate (s, i), $i \in S$ cu capacitățile $c_{si} = a_i$ şi costurile unitare de transport $p_{si} = 0$;
- un nod ***t*** şi rutele orientate (j, t), $j \in T$ cu $c_{jt} = b_j$, $p_{jt} = 0$.

Procedura de determinare a *fluxului maxim de cost minim* nu necesită testarea prealabilă a capacității rețelei de a permite satisfacerea cererilor de consum ale destinațiilor. Ea oferă cel mai mare flux posibil în rețea între S şi T realizabil la costul cel mai mic.

Pentru uniformizarea notației vom presupune că orice rută orientată între două puncte ale rețelei poate fi permisă. Rutele (i, j) nepermise în realitate le vom bloca prin $c_{ij}=0$, în acest fel operându-se doar pe rutele permise.

2. Modelul matematic

Să se determine în rețeaua $G = (X, E)$ un flux $f = \left(f_{ij}\right)_{i,j \in X}$ *(convenim ca* $f_{ii} = 0$ *)*, care satisface condițiile:

$$\sum_{j \in X} f_{sj} = Q \qquad (2.2)$$

$$\sum_{j \in X} f_{ij} = \sum_{j \in X} f_{ji} \quad ,(\forall)\ i,j \in X\text{-}\{s, t\} \qquad (2.3)$$

(conditiile de conservare a fluxului în nodurile intermediare)

$$\sum_{j \in X} f_{jt} = Q \qquad (2.4)$$

$$0 \leq f_{ij} \leq c_{ij} \qquad (2.5)$$

şi care minimizează funcția cost

$$(\ min\ )P(f) = \sum_{i,j \in X} p_{ij} f_{ij}\ . \tag{2.6}$$

Vom efectua următoarele două modificări:

- constanta Q reprezentând necesarul de deplasat de la s la t va fi privită în continuare ca o variabilă a modelului şi va fi renotată cu v $(Q = v)$;
- în loc de a minimiza obiectivul (2.6) vom maximiza expresia

$$\beta \cdot v - \sum_{i,j} p_{ij} f_{ij}\quad ,$$

unde β *este un parametru ce va lua valorile 0,1,2,...*

Se obține în acest fel următoarea colecție de probleme de maximizat:

$$\begin{cases} \sum_{j \in X} f_{sj} - v = 0 & (2.2'\ ) \\ \sum_{j \in X} f_{ij} - \sum_{j \in X} f_{ji} = 0 & (2.3'\ ) \\ -\sum_{j \in X} f_{jt} + v = 0 & (2.4'\ ) \\ 0 \le f_{ij} \le c_{ij} & (2.5'\ ) \\ (max)\left[\beta \cdot v - \sum_{i,j \in X} p_{ij} f_{ij}\right] & (2.6'\ ) \end{cases}$$

Funcția obiectiv (2.6') introduce un "premiu" pentru fiecare unitate de flux transportată de la s la t, caz în care (2.6') are semnificația unui profit net rezultat din transportarea a v unități de produs la s la t. Acest profit se obține din premiul $\beta \cdot v$ din care se scad cheltuielile de transport $\sum_i \sum_j p_{ij} f_{ij}$.

Pentru β suficient de mare, problemele (2.2')-(2.6') rezolvă problema (2.2)-(2.6) oferind *fluxul de cost minim* dintre toate fluxurile de valoare maximă de la s la t.

Cu cât β este mai mare algoritmul de rezolvare urmăreşte să mărească pe v, iar pentru un β constant oferă valoarea maximă funcției obiectiv. Analizând soluția modelului (2.2')-(2.6') observăm că:

- dacă $v \geq Q$, problema originală (2.2)-(2.6) are soluție;
- dacă $v < Q$, rețeaua de transport nu poate satisface cererile destinațiilor.

Rezolvând problema (2.2')-(2.6') pentru β = 0, 1, 2... obținem un şir de fluxuri succesive $f^{(0)}, f^{(1)}, f^{(2)},\ldots$, ultimul fiind fluxul optim căutat.

Obținerea efectivă a unui flux maxim de cost minim, adică a unei soluții a modelului (2.2)-(2.6), se poate face în mai multe moduri (vezi [8], [12]):

- prin parcurgerea unui număr de iterații succesive în cadrul cărora, într-o primă etapă se determină drumul de cost minim de la *s* la *t*, iar în etapa a doua de transportă pe acesta fluxul maxim posibil;
- construind un flux maxim de la *s* la *t* în rețeaua de transport fără a ține seama de costuri, şi apoi transformându-l într-unul de cost minim prin eliminarea tuturor circuitelor de cost negativ corespunzătoare fluxului maxim determinat în primă instanță, prin reorientarea unora dintre fluxurile existente pe anumite muchii;
- prin construirea dualului modelului (2.2')-(2.6') şi utilizarea teoremei ecarturilor complementare pentru determinarea soluțiilor celor două probleme.

Deoarece prezentarea acestor algoritmi şi euristici nu face obiectul cursului de față, vom lăsa studiul şi utilizarea lor în cadrul aplicațiilor şi a temelor de casă.

2.3 Modele de tip stoc

În general, orice cantitate de resursă (sau produs finit) care nu este utilizată în prezent şi este destinată unui consum viitor constituie un *stoc*. Necesitatea formării stocurilor este justificată prin faptul că resursele ce formează aceste stocuri sunt cerute în general în mod continuu, în timp ce aprovizionarea acestor stocuri se realizează în mod discret.

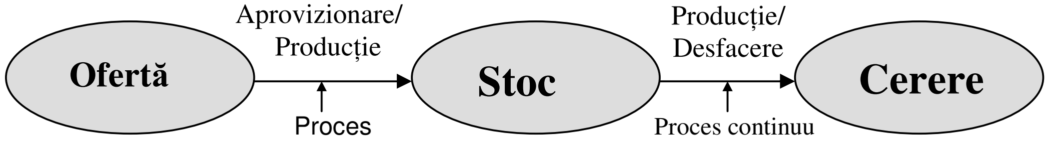

Figura 2.2 Mecanismul formării stocurilor la intrarea/ieşirea din firmă

Avantajul formării stocurilor este dat de asigurarea bunei desfăşurări a producţiei în timp, respectiv de onorarea promptă a cererilor clienţilor. Dezavantajul major ţine de faptul că stocul reprezintă costuri imobilizate (cost al capitalului, dobândă, profituri), cheltuieli de întreţinere, salarii, pierderi datorate deprecierii fizice sau morale.

Gestiunea stocurilor vizează determinarea dimensiunii optime a acestora, astfel încât cheltuielile implicate de stocare să fie minime. În acest sens, trebuie avute în vedere toate categoriile de cheltuieli antrenate de formarea şi gestionarea stocurilor.

În cele ce urmează ne vom situa pe poziţia unei firme producătoare, prezentând posibilitatea de modelare a procesului de stocare a produselor finite.

2.3.1. Elementele unui proces de stocare

Principalele elemente care trebuie avute în vedere la modelarea procesului de stocare sunt:

a) ***Cererea*** din produsul stocat poate fi:

- *deterministă* (cunoscută cu un oarecare grad de precizie într-un anumit interval);
- *aleatoare* dar stabilă statistic (nu este cunoscută cu precizie, dar respectă o anumită legitate statistică);
- aleatoare şi instabilă statistic (sezonieră);
- necunoscută.

Vom nota cu:

Q - cantitatea totală cerută dintr-un anumit bun într-o perioadă T;

T - intervalul de timp pe care se analizează evoluţia stocului.

În ipoteza că cererea este *constantă*, notăm cu r intensitatea cererii reprezentând cantitatea de produs cerută în unitatea de timp:

$$r = \frac{Q}{T} \tag{2.7}$$

Dacă cererea este aleatoare, r este o variabilă aleatoare.

b) ***Perioada de reaprovizionare***, notată cu t, reprezintă intervalul dintre două aprovizionări succesive ale stocului. Intervalul de timp t poate fi constant sau variabil. În modelele ce urmează a fi analizate, t va fi considerat constant.

Între două refaceri succesive ale stocului nivelul acestuia variază între un nivel maxim S şi unul minim (de regulă egal cu 0). Între cele două nivele extreme există şi un nivel mediu al stocului, precum şi un nivel de alarmă (foarte apropiat de cel minim).

Este foarte posibil ca în anumite perioade stocul să fie 0, cererea neputând fi în acest caz satisfăcută. Comenzile care nu pot fi satisfăcute sunt anulate cu pierderile de rigoare, sau sunt amânate, onorarea făcându-se după o perioadă de timp cu plata unor penalizări.

c) ***Volumul maxim al comenzilor neonorate*** (*D*) datorită lipsei produsului din stoc. Absența produsului din stoc poate denumirea generică de „ruptură de stoc”.

d) ***Cantitatea de produs cu care se reaprovizionează periodic stocul*** ca urmare a unei comenzi de reaprovizionare (q), poate fi, de asemenea, constantă sau variabilă.

e) ***Costurile*** asociate stocării:

- *costuri de stocare* = cheltuieli cu depozitarea, întreținerea stocului, chirii, reparații, costul capitalului imobilizat, valoarea produselor perisate, salariile personalului depozitului, etc.. Vom nota cu c_s costul stocării unei unități de produs pe o unitate de timp;
- *costurile de lansare* (c_l) reprezintă cheltuieli de lansare a unei (unor) comenzi de reaprovizionare şi includ cheltuieli cu pregătirea reaprovizionării, poştă, telefon, salarii. Costul de reaprovizionare nu depinde de mărimea cantității q cu care se face aprovizionarea.
- *costuri de penalizare* (cp) reprezintă costul plătit ca penalizare pe unitatea de produs şi pe unitatea de timp în care produsul lipseşte din stoc.

Din punct de vedere al acestor elemente, modelele de stoc se împart în:

- modele de stoc cu cerere determinată constantă şi perioadă fixă de reaprovizionare;
- modele cu cerere aleatoare şi perioadă fixă de reaprovizionare.

2.3.2. Model de stoc cu cerere constantă şi perioadă fixă de reaprovizionare

O firmă trebuie să satisfacă o comandă de Q unități dintr-un anumit produs, într-un interval de timp T (de regulă un an). Se presupune că cererea este constantă în timp, având în orice moment al intervalului $[0, T]$ intensitatea $r = \frac{Q}{T}$. Produsul este realizat de către firmă în cadrul unor cicluri de fabricație. Pe durata unui ciclu de fabricație intensitatea producției k (cantitatea de produse fabricată pe unitatea de timp) este constantă. Vom presupune că $k > r$, astfel încât de-a lungul unui ciclu de fabricație cererea să poată fi satisfăcută, existând şi disponibilități pentru formarea unui stoc din care se va putea acoperi cererea în perioada dintre două cicluri de fabricație consecutive.

Se presupun cunoscute:

- c_s – costul stocării unei unități de produs pe unitatea de timp;
- c_l – costul de lansare a unui ciclu de fabricație;
- c_p – costul de penalizare în cazul în care între două cicluri de fabricație consecutive există şi momente în care cererea nu poate fi acoperită.

Problema constă în a stabili durata unui ciclu de fabricație, intervalul dintre două cicluri consecutive, volumul producției şi alți parametri, astfel încât cheltuielile totale de lansare, stocare, penalizare pe întreg intervalul T să fie minime.

În cele ce urmează vom utiliza următoarele notații:

t_1 = intervalul de timp în care se formează stocul. În acest interval stocul creşte liniar de la valoarea 0 la S;

t_2 = intervalul de timp în care stocul este consumat (descreşte liniar de la S la 0);

t_3 = intervalul pe care se acumulează cereri neonorate datorită lipsei produsului din stoc. Volumul cererilor neonorate creşte liniar de la 0 la D.

t_4 = intervalul în care cererile neonorate acumulate în intervalul t_3 sunt satisfăcute în mod progresiv, volumul lor reducându-se de la D la 0.

Variația în timp a nivelului stocului este dată în Figura 2.3.

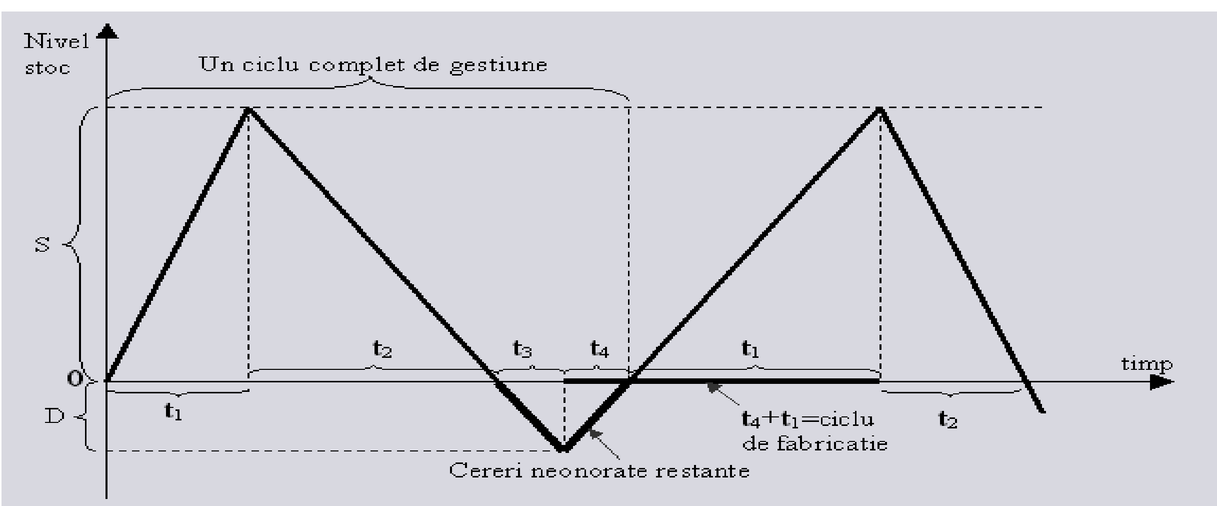

Figura 2.3 Formarea şi consumarea stocului de produse finite

Cheltuielile de gospodărire a stocului pe intervalul: $t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$, deci pe intervalul dintre două desfaceri succesive ale stocului se compun din:

$$\underset{a)}{\begin{pmatrix}\text{Cheltuieli de}\\ \text{pregătire a}\\ \text{unui nou ciclu}\\ \text{de fabricație}\end{pmatrix}} + \underset{b)}{\begin{pmatrix}\text{Cheltuieli de}\\ \text{stocare pe}\\ \text{intervalul}\\ t_1+t_2\end{pmatrix}} + \underset{c)}{\begin{pmatrix}\text{Cheltuieli de}\\ \text{penalizare}\\ \text{pe intervalul}\\ t_3+t_4\end{pmatrix}}$$

a) sunt cheltuielile de lansare c_l;

$$b)=\begin{pmatrix}\textit{cost unitar}\\ \textit{de stocare } c_s\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\textit{stocul}\\ \textit{mediu}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\textit{intervalul pe}\\ \textit{care existăxistc}\end{pmatrix}=c_s\cdot\frac{S}{2}\cdot(t_1+t_2)$$

$$c)=\begin{pmatrix}\textit{cheltuieli de}\\ \textit{penalizare pe}\\ \textit{produs şş pe}\\ \textit{unitatea de timp}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\textit{volumul}\\ \textit{mediu al}\\ \textit{comenzilor}\\ \textit{amânate}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\textit{Intervalul}\\ \textit{pe care}\\ \textit{existăxruptura}\\ \textit{de stoc}\end{pmatrix}=c_p\cdot\frac{D}{2}\cdot(t_3+t_4)$$

$$c_l+c_s\cdot\frac{S}{2}\cdot(t_1+t_2)+c_p\cdot\frac{D}{2}+(t_3+t_4) \qquad (2.8)$$

Însumând aceste cheltuieli obținem costul gestiunii stocului pe intervalul t ca fiind:

Pe o unitate de timp, aceste cheltuieli au expresia:

$$F(t_1,t_2,t_3,t_4,S,D)\frac{c_l+cs\cdot\frac{S}{2}\cdot(t_1+t_2)+c_p\cdot\frac{D}{2}+(t_3+t_4)}{t_1+t_2+t_3+t_4} \qquad (2.9)$$

Studiind geometria diagramei din Figura 2.3, deducem legătura dintre cele 6 variabile ale funcției F, putând exprima aceste cheltuieli doar în funcție de două variabile, astfel:

$$\left.\begin{array}{l} S=(k-r)\cdot t_1=r\cdot t_2\\ D=r\cdot t_3=(k-r)\cdot t_4\end{array}\right\}$$ Din aceste relații exprimăm pe t_1, t_4, S, D în funcție de t_2 şi t_3:

$$\left.\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{r}{k-r}\cdot t_2 \\[2ex] S = v\cdot t_2 \\[2ex] t_4 = \dfrac{r}{k-r}\cdot t_3 \\[2ex] D = r\cdot t_3 \end{array}\right\} \Rightarrow F = F(t_2, t_3) = \frac{\dfrac{k\cdot r}{2(k-r)}\cdot c_s\cdot t_2^{\,2} + \dfrac{k\cdot v}{2(k-v)}\cdot c_p\cdot t_3^{\,2} + c_l}{\dfrac{k}{k-r}\cdot(t_2+t_3)} \qquad (2.10)$$

Înlocuind în expresia lui $F(t_2, t_3)$ pe:

$$t_1 + t_2 = \frac{r\cdot t_2}{k-r} + t_2; \qquad c_p = \frac{k\cdot r}{2}\cdot\frac{k\cdot t_2}{k-r}; \qquad t_3 + t_4 = \frac{r\cdot t_3}{k-r} + t_3; \qquad c_p = \frac{r\cdot t_3}{2}\cdot\frac{k\cdot t_3}{k+r},$$

obținem relația:

$$F(t_2, t_3) = \frac{\frac{1}{2}\cdot r\cdot c_s\cdot t_2^{\,2} + \frac{1}{2}\cdot r\cdot c_p\cdot t_3^{\,2} + (1-\frac{r}{k})c_l}{t_2 + t_3} \qquad (2.11)$$

Scopul nostru este acela de a minimiza funcția $F(t_2, t_3)$. În acest scop, anulând derivatele parțiale ale funcției în raport cu t_2 şi t_3 vom determina parametrii optimi ai gestiunii.

$$\frac{\partial F}{\partial t_2} = 0 \Leftrightarrow r\cdot c_s\cdot t_2\cdot(t_2+t_3) - \left(\frac{1}{2}\cdot r\cdot c_s\cdot t_2^{\,2} + \frac{1}{2}\cdot r\cdot c_p\cdot t_3^{\,2} + \left(1-\frac{r}{k}\right)\cdot c_l\right) = 0 \qquad (2.12)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t_3} = 0 \Leftrightarrow r\cdot c_p\cdot t_3\cdot(t_2+t_3) - \left(\frac{1}{2}\cdot r\cdot c_s\cdot t_2^{\,2} + \frac{1}{2}\cdot r\cdot c_p\cdot t_3^{\,2} + \left(1-\frac{r}{k}\right)\cdot c_l\right) = 0 \qquad (2.13)$$

Din (2.12) şi (2.13) rezultă

$$r\cdot c_s\cdot t_2\cdot(t_2+t_3) = r\cdot c_p\cdot t_3\cdot(t_2+t_3) \Leftrightarrow c_s\cdot t_2 = c_p\cdot t_3 \Rightarrow t_3 = \frac{c_s}{c_p}\cdot t_2 \qquad (2.14)$$

Înlocuind pe t_3 în relația (2.12) obținem:

$$\frac{1}{2}\cdot r\cdot\frac{c_s+c_p}{c_p}\cdot t_2^{\ 2}=\left(1-\frac{r}{k}\right)\cdot c_l,$$ de unde rezultă:

$$t_2^*=\sqrt{\frac{2\cdot c_p\cdot\left(1-\frac{r}{k}\right)\cdot c_l}{r\cdot c_s\cdot\left(c_s+c_p\right)}}\quad \text{şi}\quad t_3^*=\sqrt{\frac{2\cdot c_s\cdot\left(1-\frac{r}{k}\right)\cdot c_l}{r\cdot c_p\cdot\left(c_s+c_p\right)}}\ ,\qquad (2.15)$$

(t_2^*, t_3^*) fiind punctul de minim al funcţiei $F(t_2, t_3)$.
Exprimând ceilalţi parametri ai modelului în funcţie de t_2^* şi t_3^* obţinem:

$$F^*=\sqrt{2\cdot r\cdot c_s\cdot c_l\cdot\left(1-\frac{r}{k}\right)\cdot\frac{c_p}{c_p+c_s}}$$
$$S^*=r\cdot t_2^*;$$
$$D^*=r\cdot t_3^*;$$
$$t_1^*=\frac{S^*}{k-r}=\frac{v\cdot t_2^*}{k-r};$$
$$t_4^*=\frac{d^*}{k-v}=\frac{v\cdot t_3^*}{k-v};$$

$$q^*=k\left(t_1^*+t_4^*\right).$$

Durata unui ciclu de fabricaţie este $t_1^*+t_4^*$, iar perioada optimă de reaprovizionare este $t^* = t_1^* + t_2^* + t_3^* + t_4^*$.

Pentru a minimiza cheltuielile cu formarea şi gestiunea stocului unui anumit produs, firma trebuie să se reaprovizioneze la un interval t^* cu o cantitate q^*. Nivelul maxim al stocului trebuie să fie S^* iar volumul comenzilor neonorate de D^*. În această situaţie, cheltuielile de gestiune vor avea nivelul minim F^* pe unitatea de timp, sau $t^*\cdot F^*$ pe întregul ciclu de gestiune.

În funcţie de contextul economic ce se cere modelat, acest model general poate fi particularizat, conducând în acest fel la scrierea unor modele de tip stoc cu sau fără ruptură de stoc, cu cerere aleatoare, cu aprovizionare continuă sau instantanee etc.

Vom prezenta în continuare câteva cazuri particulare ale acestui model.

2.3.3 Model de gestiune cu cerere constantă şi perioadă fixă de reaprovizionare. Cazul producției instantanee fără permisiunea rupturii de stoc.

În cazul în care nu există ruptură de stoc nu vom avea cheltuieli de penalizare c_p, ci doar de lansare (c_l) şi de stocare (c_s).

Se presupun date Q şi T cu semnificațiile anterioare şi se cere determinarea cantității q cu care se va face aprovizionarea după fiecare perioadă de timp t astfel încât costul total de lansare a comenzilor şi de stocare a tuturor celor Q produse să fie minim.

Deoarece cererea este constantă şi perioada t de reaprovizionare este fixă, din diagrama din Figura 2.4 deducem relația $\frac{Q}{q} = \frac{T}{t} \Rightarrow t = \frac{q \cdot T}{Q}$.

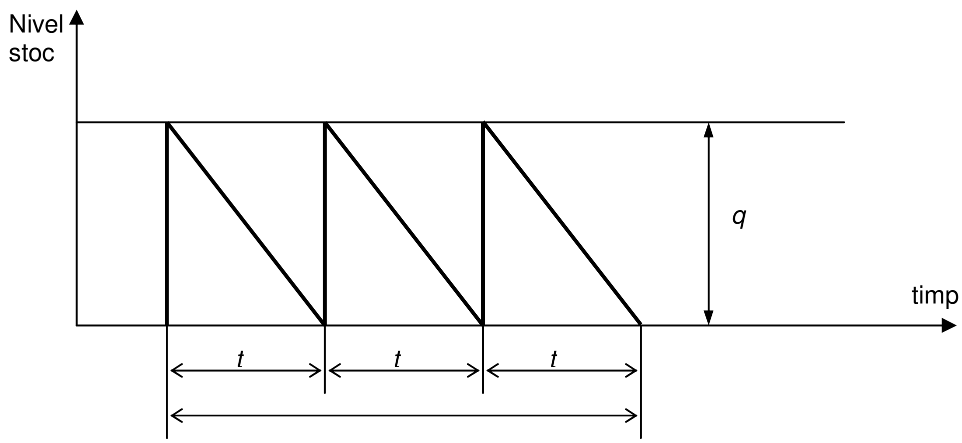

Figura 2.4

Costul gestiuni stocului corespunzător unei singure perioade t este $c_l + c_s$, adică $c_l + \frac{1}{2} \cdot q \cdot t \cdot c_s$.

Deoarece producția este instantanee şi nu se admite ruptura de stoc $t_1 = 0,\ t_3 = t_4 = 0$ $\Rightarrow t = t_2$.

Numărul de perioade t din intervalul de gestiune T este egal cu Q/q => costul total pe întregul interval de gestiune este:

$$F(q) = \left(c_l + \frac{1}{2} \cdot q \cdot t \cdot c_s\right) \cdot \frac{Q}{q} = \underbrace{\frac{Q \cdot c_l}{q}}_{F_L(q)} + \underbrace{\frac{T \cdot c_s}{2}}_{F_S(q)} \cdot q .$$

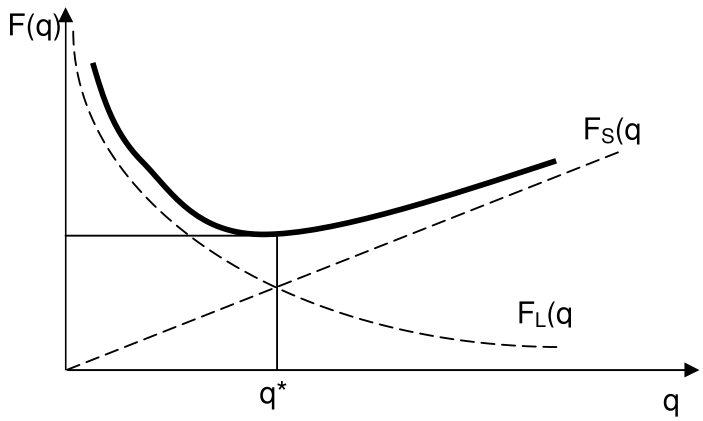

Figura 2.5

Pentru a determina nivelul minim F^* al lui $F(q)$ vom ține seama de faptul că $F_S(q)\cdot F_L(q)$ este constant, deci $F(q)$ este minim atunci când $F_L(q) = F_S(q)$

$$\Rightarrow q\cdot\frac{T\cdot c_s}{2}=\frac{Q\cdot c_l}{q}\Rightarrow q^2=\frac{2\cdot Q\cdot c_l}{T\cdot c_s}\Rightarrow q^*=\sqrt{\frac{2\cdot Q\cdot c_l}{T\cdot c_s}}$$

$$Din\quad t=\frac{T}{Q}\cdot q\ \Rightarrow\ t^*=\frac{T}{Q}\cdot q^*=\sqrt{\frac{2\cdot T\cdot c_l}{Q\cdot c_s}}$$

Volumul minim al cheltuielilor (costul gestiunii) pe întregul interval T este:

$$F^*=F(q^*)=\frac{Q\cdot c_l}{q^*}+\frac{T\cdot c_s}{2}\cdot q^*=\sqrt{2\cdot Q\cdot T\cdot c_l\cdot c_s}$$

Aceste relații se pot obține şi din modelul general prezentat la punctul 3.2.2, înlocuind $t_1 = t_3 = t_4 = 0$, $D = 0$ şi făcând pe k şi c_p să tindă la infinit. De asemenea, volumul cheltuielilor pe unitatea de timp trebuie ponderat cu numărul perioadelor de reaprovizionare t din intervalul de gestiune T $(t=\frac{Q}{q})$.

2.3.4 Model de gestiune cu perioadă fixă, cerere constantă şi posibilitatea de ruptură a stocului

Pentru perioada în care stocul este 0 şi cererile nu pot fi satisfăcute firma plăteşte c_p unități monetare pe fiecare produs care lipseşte din stoc şi pe unitatea de timp.

În ipotezele introduse în paragraful 2.3.2 pentru modelul general, vom ține seama de faptul că $t_1 = t_4 = 0 \Rightarrow t = t_2 + t_3$.

Schematic, situația este prezentată în Figura 2.6.

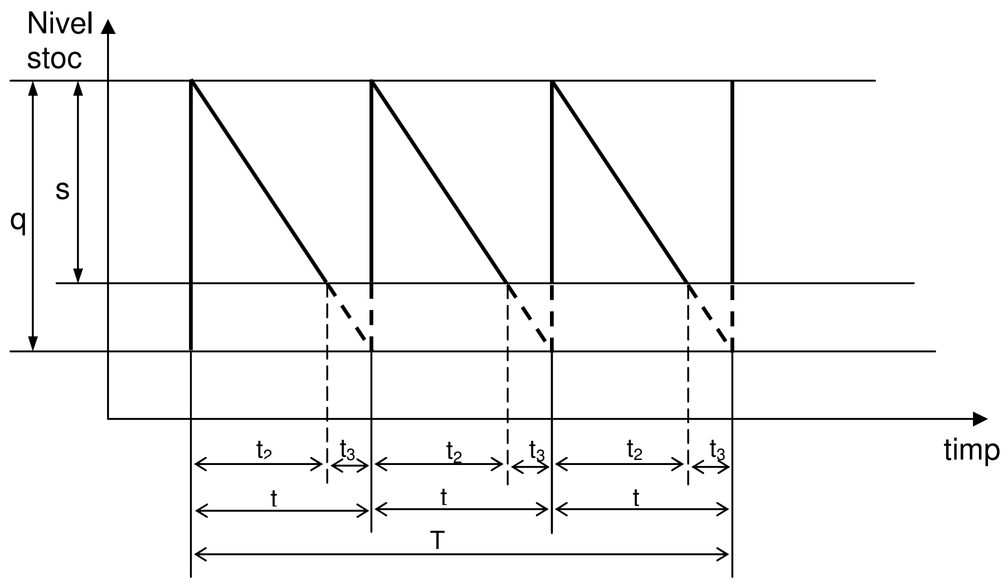

Figura 2.6

Pe parcursul intervalului t_2 nivelul stocului este suficient pentru a satisface cererea. Pe intervalul $t_3 = t - t_2$ se înregistrează lipsa produselor din stoc. Pe acest interval se plăteşte costul de penalizare c_p pentru fiecare articol lipsă pe unitatea de timp.

Cheltuielile corespunzătoare unei perioade t vor fi:

$-$ *cheltuieli de lansare :* c_l

$-$ *cheluieli de stocare :* $\frac{1}{2} \cdot s \cdot t_2 \cdot c_s$

$-$ *cheltuieli de penalizare :* $\frac{1}{2} \cdot (q - s) \cdot t_3 \cdot c_p$

Costul pe întregul interval de gestiune T va fi:

$$F_{(q,s)} = \left[\frac{1}{2} \cdot s \cdot t_2 \cdot c_s + c_l + \frac{1}{2} \cdot (q - s) \cdot t_3 \cdot c_p \right] \cdot \frac{Q}{q}$$

Din diagrama din Figura 2.6 avem rapoartele:

$$\frac{Q}{q}=\frac{T}{t}; \qquad \frac{s}{q}=\frac{t_2}{t}; \qquad \frac{t_3}{t}=\frac{q-s}{q}.$$

Înlocuind în expresia lui $F_{(q,s)}$ obținem:

$$F_{(q,s)}=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{s^2\cdot T\cdot c_s}{q}+\frac{Q}{q}\cdot c_l+\frac{(q-s)^2\cdot T\cdot c_p}{2\cdot q}\right].$$

Presupunând cererea continuă, minimul funcției $F_{(q,s)}$ se atinge pentru q^* şi s^* soluții ale sistemului:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F_{(q,s)}}{\partial q}=0\\ \dfrac{\partial F_{(q,s)}}{\partial s}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{-s^2\cdot T\cdot c_s}{2\cdot q^2}-\dfrac{Q}{q}\cdot c_l+\dfrac{T\cdot c_p}{2}\cdot\dfrac{2\cdot q\cdot(q-s)-(q-s)^2}{q^2}=0\\ \dfrac{s\cdot T\cdot c_s}{q}-\dfrac{2\cdot(q-s)\cdot T\cdot c_p}{2\cdot q}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}T\cdot c_p\cdot q^2=2\cdot Q\cdot c_l+s^2\cdot T\cdot(c_s+c_p) \rightarrow T\cdot c_p\cdot q^2\cdot\left(1-\dfrac{c_p}{c_s+c_p}\right)=2\cdot Q\cdot c_l\\ s\cdot T\cdot(c_s+c_p)=q\cdot T\cdot c_p \qquad \rightarrow s=q\cdot\dfrac{c_p}{c_s+c_p}\end{cases}$$

unde $\rho=\dfrac{c_p}{c_s+c_p}=$ factorul de indisponibilitate sau intensitatea rupturii de stoc.

Din sistemul anterior obținem:

$$q^2=\frac{2Q\cdot c_l}{t\cdot c_s}\cdot\frac{c_s+c_p}{c_p} \Rightarrow q^*=\sqrt{2\cdot\frac{Q\cdot c_l}{T\cdot c_s}}\cdot\sqrt{\frac{c_s+c_p}{c_p}}$$

$$\Rightarrow s^*=q^*\cdot\rho=\sqrt{2\cdot\frac{q\cdot c_l}{T\cdot c_s}}\cdot\sqrt{\frac{c_p}{c_s+c_p}}$$

$$\Rightarrow t^*=q^*\cdot\frac{T}{Q}=\frac{T}{Q}\cdot\sqrt{2\cdot\frac{q\cdot c_l}{T\cdot c_s}}\cdot\sqrt{\frac{c_s+c_p}{c_p}}=\sqrt{2\cdot\frac{T\cdot c_l}{Q\cdot c_s}}\cdot\sqrt{\frac{c_s+c_p}{c_p}}$$

$$F^*=\frac{1}{2}\cdot\frac{s^{*2}\cdot T\cdot c_s}{q^*}+\frac{Q\cdot c_l}{q^*}+\frac{(q^*-s^*)^2\cdot T\cdot c_p}{2\cdot q^*}=\sqrt{2\cdot Q\cdot T\cdot c_s\cdot c_l}\cdot\sqrt{\frac{c_p}{c_s+c_p}}$$

Notă : $q^*=s^*+D^*$

2.4 Studii de caz, probleme, întrebări

2-1. *Optimizarea distribuției de produse finite a unei firme*

O firmă produce un anumit bun în centrele de producție situate în nodurile sursă s_1 şi s_2, clienții firmei fiind situați în nodurile t_1, t_2, t_3 ale rețelei din figura 2.7. Producția lunară a celor două centre de producție este de a_1 = 15 şi respectiv a_2 = 10 unități de produs, în timp ce clienții firmei solicită lunar b_1 = 10, b_2 = 5 şi respectiv b_3 = 10 unități de produs. Între nodurile sursă şi cele destinație se află o rețea de drumuri a căror capacitate de transport (în unități de produs) este înscrisă în paranteze pe muchiile rețelei din figura 2.7, costul unitar (în unități monetare pe unitatea de produs) fiind înscris pe fiecare muchie a rețelei în afara parantezei. Firma doreşte să satisfacă cererea clienților situați în nodurile destinație cu cele mai mic cost de transport posibil.

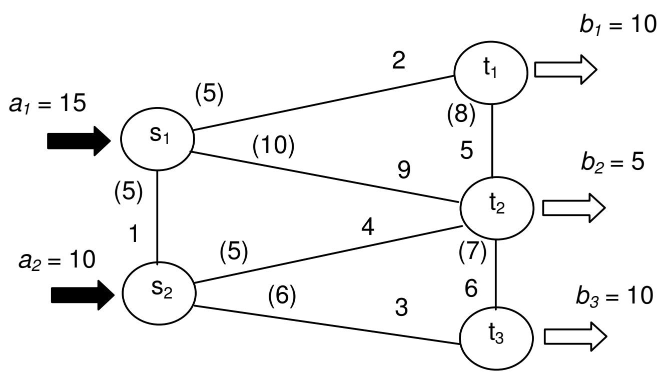

Figura 2.7 Rețeaua de distribuție a firmei

Soluție

Etapa 1. Construirea rețelei standard

Pornind de la rețeaua din Figura 2.7 construim rețeaua standard adăugând un unic nod sursă s şi muchiile orientate (s, s_1), (s, s_2) şi un unic nod destinație t şi rutele orientate (t_1, t), (t_2, t), (t_3, t). Pe aceste rute fictive introduse capacitățile vor fi egale cu oferta centrelor de producție (la intrarea în rețea), respectiv cu cererile consumatorilor (la ieşirea din rețea). Deoarece aceste rute sunt fictive, costurile unitare de transport vor fi nule. Rețeaua rezultată se află în Figura 2.8.

Soluția la problema pe care firma o are de rezolvat constă în construirea unui flux maxim de cost minim de la s la t în rețeaua standard. Vom realiza acest lucru progresiv, prin parcurgerea în etapa a doua a unui număr de iterații în cadrul cărora vom transporta unități de flux de la *s* la *t* pe drumurile de cost minim.

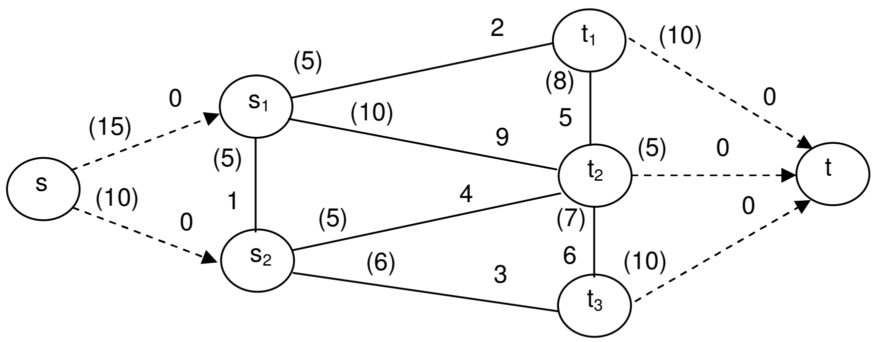

Figura 2.8 Rețeaua standard

Etapa 2. Construirea fluxului maxim de cost minim de la *s* la *t*.

Iterația 1

Pasul 1. În rețeaua costurilor determinăm printr-una din procedurile de etichetare cunoscute (Dijkstra sau Ford, de exemplu), drumul (drumurile) de cost minim de la *s* la *t*. În Figura 2.9 etichetele nodurilor reprezintă cel mai mic cost al unui drum de la *s* la nodul respectiv, în timp ce orientarea reprezintă precedențele.

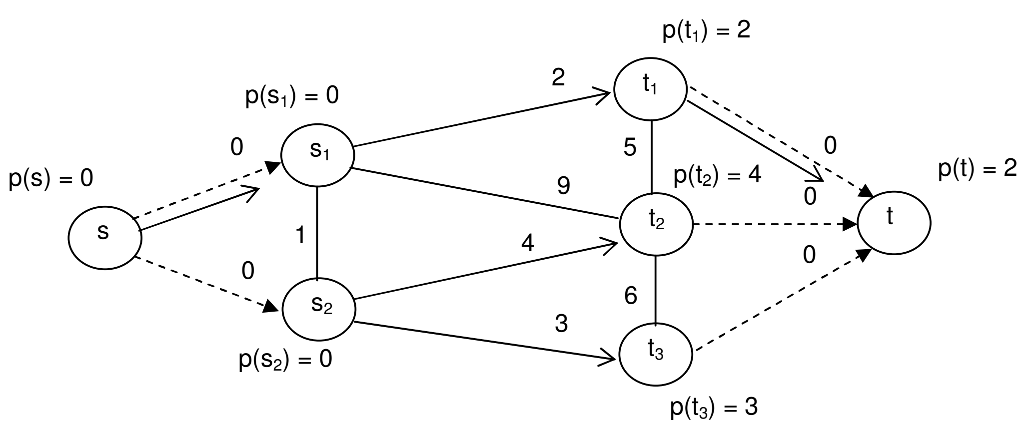

Figura 2.9 Determinarea drumului de cost minim de la *s* la *t*

Aşa cum se observă din Figura 2.9, cel mai redus cost de transport a unei unități de produs de la *s* la *t* este de 2 unități monetare (eticheta nodului *t*) şi corespunde drumului $s \rightarrow s_1 \rightarrow t_1 \rightarrow t$.

Pasul 2. Pe drumul de cost minim de la *s* la *t* determinat la pasul 1 transportăm cantitatea maxim posibilă de produs, cantitate egală cu minimul capacităților reziduale ale arcelor rețelei din Figura 2.8 (vezi algoritmul Ford-Fulkerson [8]).

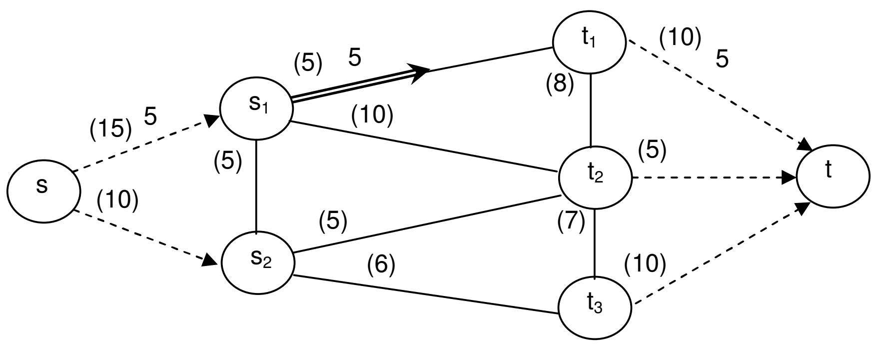

Figura 2.10 Construirea fluxului f_1

Drum / Capacități reziduale ale arcelor	Număr de unități de produs (flux) transportate
$s \xrightarrow{15} s_1 \xrightarrow{5} t_1 \xrightarrow{10} t$	5

Prin transportul celor 5 unități de flux ruta $s_1 \rightarrow t_1$ s-a saturat. Această rută se va bloca la iterația următoare prin orientarea sa strictă în sensul $t_1 \rightarrow s_1$. În rețeaua din Figura 2.10 se află fluxul f_1 cu valoarea de 5 unități de flux (produs).

Iterația 2

Pasul 1. Determinăm drumul de cost minim în rețeaua costurilor adaptată fluxului din Figura 2.10.

Drumul de cost minim este $s \rightarrow s_2 \rightarrow t_3 \rightarrow t$ cu valoarea de 3 unități monetare (vezi Figura 2.11).

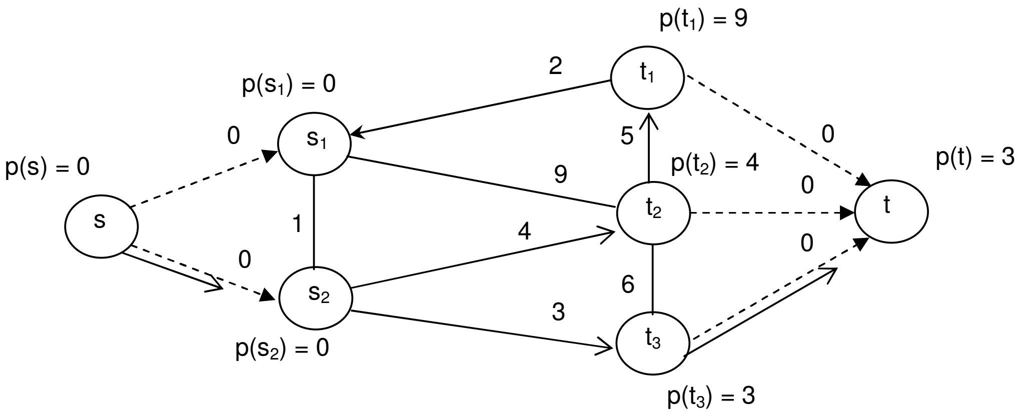

Figura 2.11 Determinarea drumului de cost minim de la *s* la *t*

Pasul 2. Construim noul flux pornind de la fluxul f_1 din Figura 2.10.

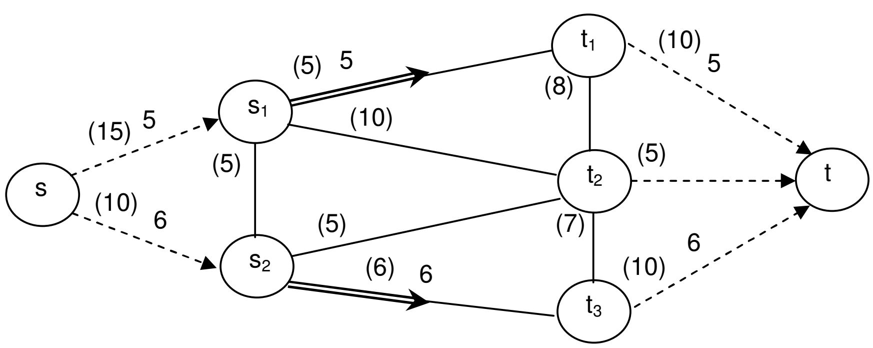

Figura 2.12 Construirea fluxului f_2

Drum / Capacități reziduale ale arcelor	Număr de unități de produs (flux) transportate
$s \xrightarrow{10} s_2 \xrightarrow{6} t_3 \xrightarrow{10} t$	6

Valoarea noului flux este $v(f_2) = v(f_1) + 6 = 11$ unități de flux.

În continuare se vor relua pașii 1 și 2 în cadrul unor noi iterații până în momentul în care, în rețeaua costurilor, nu mai putem pune în evidență nici un drum (succesiune de arce orientate în același sens).

Iterația 3

Pasul 1. Determinarea drumului de cost minim în rețeaua costurilor adaptată fluxului din Figura 2.12.

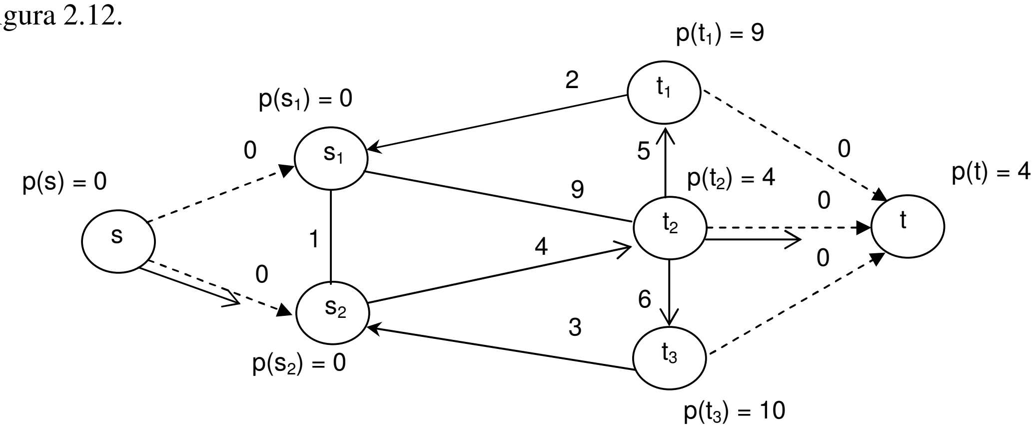

Figura 2.13 Determinarea drumului de cost minim de la *s* la *t*

Drumul de cost minim este $s \rightarrow s_2 \rightarrow t_2 \rightarrow t$ cu valoarea de 4 unități monetare.

Pasul 2. Construim noul flux pornind de la fluxul f_2.

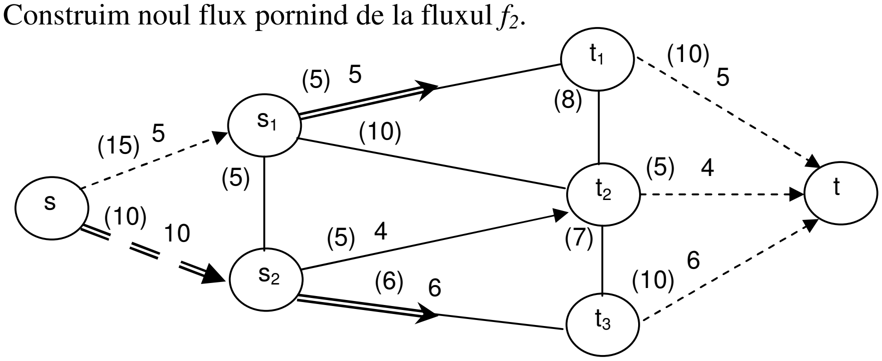

Figura 2.14 Construirea fluxului f_3

Drum / Capacități reziduale ale arcelor	Număr de unități de produs (flux) transportate
$s \xrightarrow{4} s_2 \xrightarrow{5} t_2 \xrightarrow{5} t$	4

Valoarea noului flux este $v(f_3) = v(f_2) + 4 = 15$ unități de flux.

Iterația 4

Pasul 1. Determinarea drumului de cost minim în rețeaua costurilor adaptată fluxului din Figura 2.14.

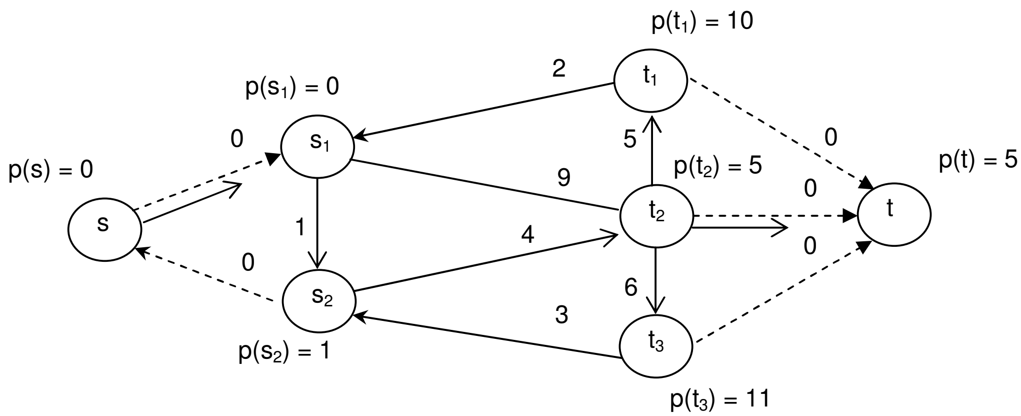

Figura 2.15 Determinarea drumului de cost minim de la *s* la *t*

Drumul de cost minim este $s \rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow t_2 \rightarrow t$ cu valoarea de 5 unități monetare.

Pasul 2. Construim noul flux pornind de la fluxul f_3.

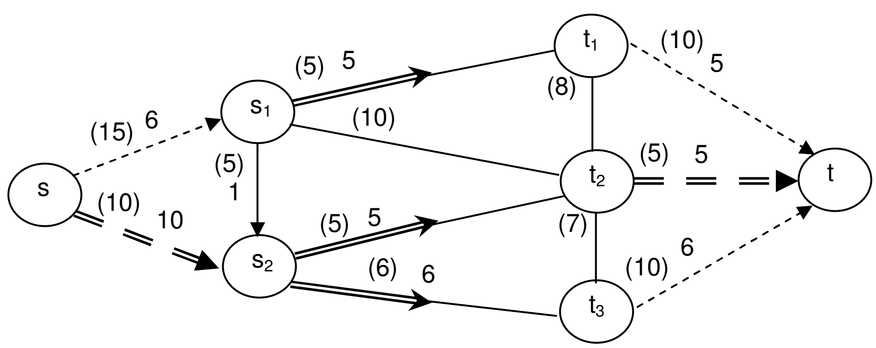

Figura 2.16 Construirea fluxului f_4

Drum / Capacități reziduale ale arcelor	Număr de unități de produs (flux) transportate
$s \xrightarrow{10} s_1 \xrightarrow{5} s_2 \xrightarrow{1} t_2 \xrightarrow{1} t$	1

Valoarea noului flux este $v(f_4) = v(f_3) + 1 = 16$ unități de flux.

Iterația 5

Pasul 1. Determinarea drumului de cost minim în rețeaua costurilor adaptată fluxului f_4.

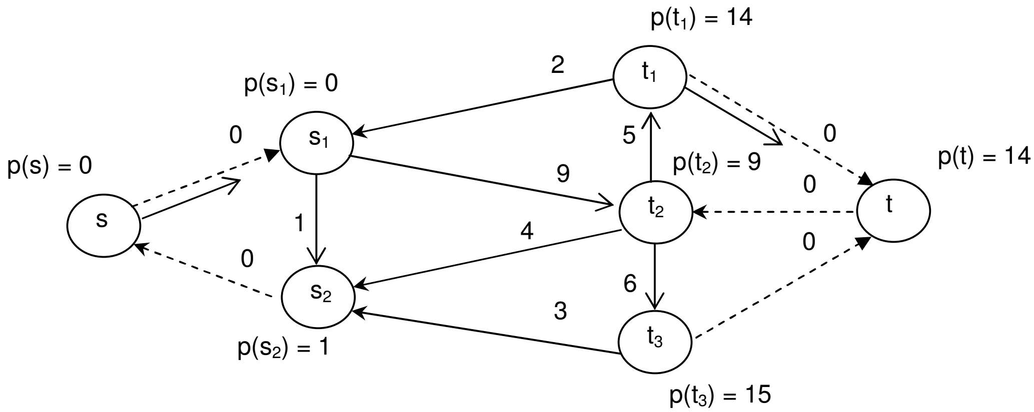

Figura 2.17 Determinarea drumului de cost minim de la *s* la *t*

Drumul de cost minim este $s \rightarrow s_1 \rightarrow t_2 \rightarrow t_1 \rightarrow t$ cu valoarea de 14 unități monetare.

Pasul 2. Construim noul flux pornind de la fluxul f_4.

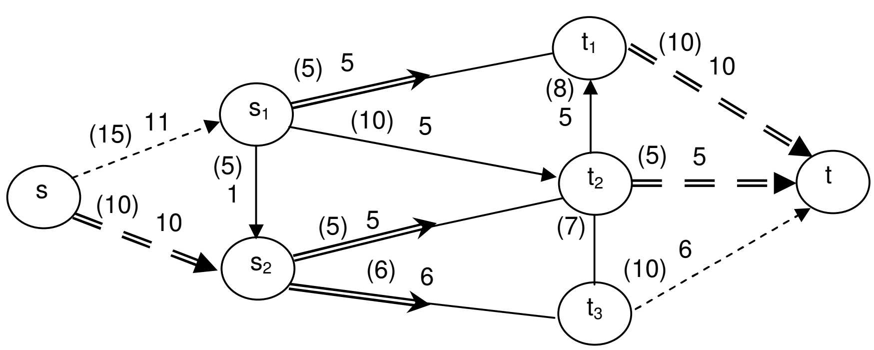

Figura 2.18 Construirea fluxului f_5

Drum / Capacități reziduale ale arcelor	Număr de unități de produs (flux) transportate
$s \rightarrow s_1 \xrightarrow{9} t_2 \xrightarrow{10} t_1 \xrightarrow{8} t$ 5	5

Valoarea noului flux este $v(f_5) = v(f_4) + 5 = 21$ unități de flux.

Iterația 6

Pasul 1. Determinarea drumului de cost minim în rețeaua costurilor adaptată fluxului f_5.

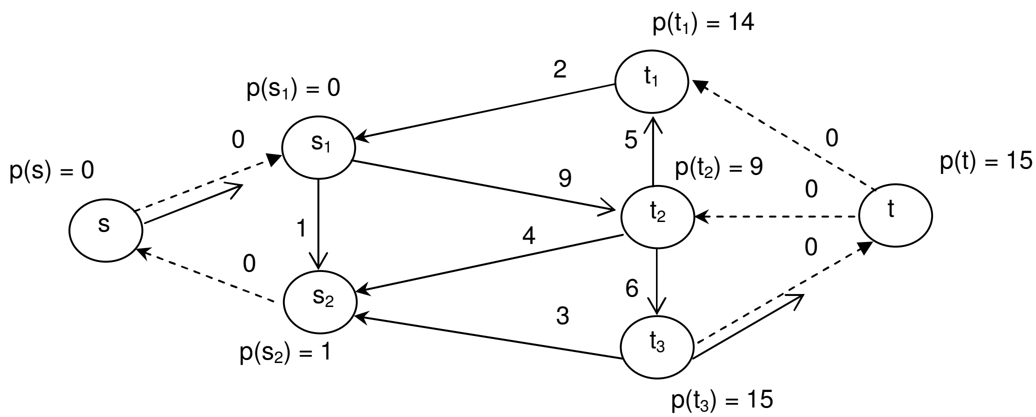

Figura 2.19 Determinarea drumului de cost minim de la *s* la *t*

Drumul de cost minim este $s \rightarrow s_1 \rightarrow t_2 \rightarrow t_3 \rightarrow t$ cu valoarea de 15 unități monetare.

Pasul 2. Construim noul flux pornind de la fluxul f_5.

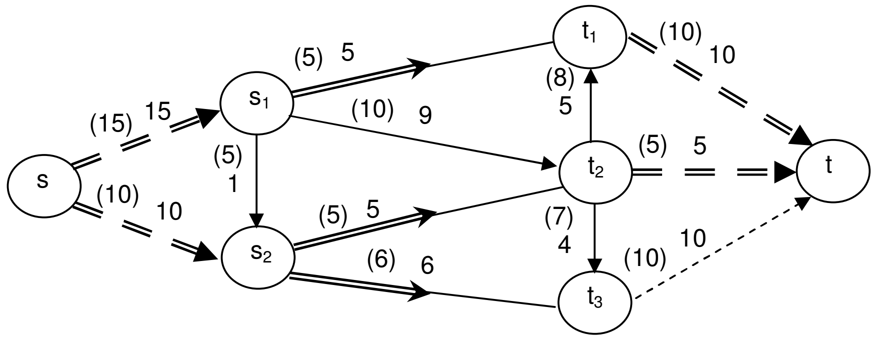

Figura 2.20 Construirea fluxului f_6

Drum / Capacități reziduale ale arcelor	Număr de unități de produs (flux) transportate
$s \xrightarrow{4} s_1 \xrightarrow{5} t_2 \xrightarrow{7} t_3 \xrightarrow{4} t$	4

Valoarea noului flux este $v(f_6) = v(f_5) + 6 = 25$ unități de flux, egală cu cantitatea de produs oferită de centrele de producție, respectiv cerută de către beneficiari. Putem concluziona în acest moment că rețeaua de transport permite satisfacerea cererilor clienților firmei.

Iterația 7

Pasul 1. Determinarea drumului de cost minim în rețeaua costurilor adaptată fluxului f_6.

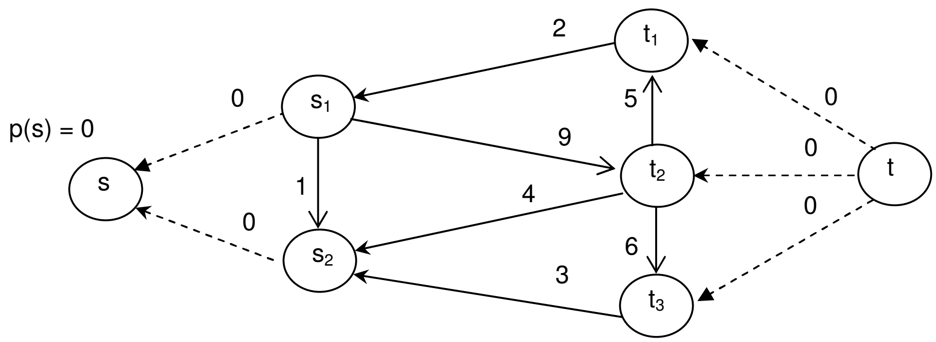

Figura 2.21 Determinarea drumului de cost minim de la *s* la *t*

Din Figura 2.21 se observă că nu mai există nici un drum compus din arce orientate de la *s* la *t* şi nesaturate, prin urmare algoritmul se opreşte. Fluxul f_6 este fluxul maxim ($v(f_6)$ = 25 unități de flux) de cost minim. Costul acestui flux, respectiv al transportării celor 25 de unități de produs de la centrele de producție la beneficiari se determină prin însumarea produselor între fluxul corespunzător fiecărei rute şi costul unitar de transport al acesteia:

$$C(f_6) = \sum_{(i,j)\in E} f_{ij} \cdot p_{ij} = 179 \text{ unități monetare.}$$

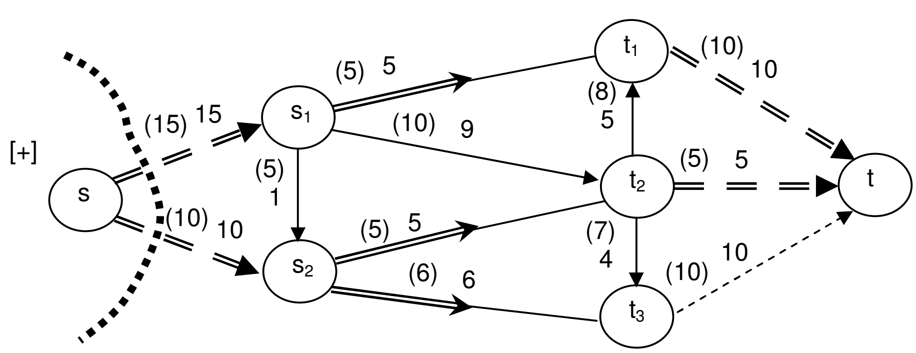

Figura 2.22 Testarea maximalității fluxului f_6

Maximalitatea fluxului f_6 este ilustrată prin aplicarea procedeului de marcaj în Figura 2.22. Se observă că putem marca doar nodul s, tăietura de capacitate minimă separând acest nod de restul nodurilor rețelei standard.

2-2. Să presupunem că în rețeaua din Figura 2.7 nu sunt precizate capacitățile maxime de transport ale muchiilor. Care este capacitatea minimă de transport cu care ar trebui dotate toate muchiile rețelei de transport astfel încât să se poată asigura satisfacerea integrală a cererilor în nodurile destinație?

2-3. Se presupune că cererea anuală pentru un material de construcții de masă realizat de către firma MAT-CONTRUCT S.R.L. este de 450.000 bucăți. În tot timpul anului, cererea este continuă şi constantă pe intervale egale.

Costul de stocare s-a evaluat prin calcule având în vedere gestiunea anterioară şi s-a stabilit că este 0,009 unități monetare/buc/zi. Cheltuielile de lansare a comenzii de reaprovizionare (de administrație, plata achizitorului, delegați, pentru recepție, etc.) se ridică la 2160 unități monetare/lot şi sunt independente de volumul lotului.

a) Determinați lotul optim, intervalul optim de reaprovizionare şi costul total al gestiunii stocului în ipoteza că firma doreşte să satisfacă în totalitate cererile beneficiarilor săi;
b) Care sunt valorile indicatorilor de mai sus în ipoteza că firma admite posibilitatea rupturii stocului şi a estimat un cost de penalizare c_p = 0,021 unități monetare /unitate/zi.

Soluție

a) Cantitatea optimă de aprovizionare (q*) va fi:

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot Q \cdot c_l}{T \cdot Cs}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 450\,000 \cdot 2160}{360 \cdot 0{,}009}} = 24\,495 \text{ bucăți.}$$

Perioada la care trebuie să sosească acest lot optim este:

$$t^* = \frac{q^* \cdot T}{Q} = \frac{24495 \cdot 360}{450\,000} = 20 \ zile\,.$$

Costul total al gestiunii este:

$F^* = \sqrt{2 \cdot Q \cdot T \cdot c_s \cdot c_l} = \sqrt{2 \cdot 450\,000 \cdot 360 \cdot 2160 \cdot 0{,}009} = 79\,363$ unități monetare.

b) Factorul de indisponibilitate are valoarea:

$$\rho = \frac{0{,}021}{0{,}009 + 0{,}021} = 0{,}7$$

Lotul necesar pentru evitarea rupturii stocului:

$$q^* = 24\,495 \cdot \sqrt{\frac{1}{0{,}7}} = 29\,276 \text{ bucăți.}$$

Stocul optim:

$s^* = 29\,276 \cdot 0{,}7 = 20\,493$ bucăți.

Lungimea optimă a perioadei de gestiune:

$$t^* = 20 \cdot \sqrt{\frac{1}{0{,}7}} = 24 \text{ zile}.$$

Costul total minim al gestiunii:

$F^* = 79\,363 \cdot \sqrt{0{,}7} = 66\,400$ unități monetare.

În acest exemplu, datele inițiale ale problemei (Q, c_l, c_s) pot fi considerate ca rezultând din studiul gestiunii materialului de construcție considerat la firma producătoare. Trebuie să precizăm că obținerea acestor date inițiale necesită o prelucrare atentă şi laborioasă uneori a numeroase observații şi acte financiar-contabile.

Totodată, acest exemplu arată că în cazul unui cost de penalizare mic putem admite ruptura stocului în vederea obținerii unor economii în totalul cheltuielilor. O ipoteză implicită în acest caz este aceea că cererile nesatisfăcute într-o perioadă sunt amânate şi satisfăcute în perioada următoare de gestiune a stocului.

2-4. O firmă fabrică un produs pentru a satisface cererea pe un număr de n perioade următoare. În perioada t cererea r_t (unități) poate fi acoperită din producția curentă x_t ca şi din stocul I_{t-1} rezultat din efortul productiv al perioadelor precedente (aceasta înseamnă că în perioada t este posibil să se producă mai mult decît r_t unități cerute, excedentul putând fi utilizat pentru satisfacerea unor cereri viitoare). Dacă nivelul producției în perioada t trebuie să crească față de nivelul atins în perioada precedentă $t-1$, adică $x_t > x_{t-1}$, firma trebuie să facă unele cheltuieli suplimentare evaluate la a_t unități monetare ([u.m.]) pe fiecare unitate de produs în surplus; la o diminuare a producției, adică în cazul $x_t < x_{t-1}$ firma suportă un cost b_t pe fiecare unitate de produs în minus. În fine, pentru fiecare unitate de produs fabricată în perioada t şi vândută în perioada următoare firma suportă un cost de stocare c_t.

Obiectivul firmei constă în elaborarea unui model în vederea determinării programului optim de producție de aşa manieră încât cheltuielile de stocare şi cele de penalizare datorate variației producției să fie minime.

Soluție

a). Ecuația de balanță în perioada t este:

$$I_t = I_{t-1}+x_t-r_t \quad , \quad t = 1,2,...,n$$

unde:

I_0 = stocul inițial;

I_n = stocul final.

De regulă, atât I_0 cât şi I_n se specifică.

b). Condițiile de nenegativitate asupra variabilelor

$$x_t \geq 0 \quad , \quad I_t \geq 0$$

c). Funcția obiectiv are două componente:

- costul stocării $c_t I_t$;
- notând cu y_t costul variației nivelului producției în perioada t, avem

$$y_t = \begin{cases} a_t(x_t - x_{t-1}), & dacă\ x_t > x_{t-1} \\ b_t(x_{t-1} - x_t), & dacă\ x_t < x_{t-1} \\ 0, & dacă\ x_t = x_{t-1} \end{cases} \quad , \quad t = 1,...,n,$$

unde x_0 este nivelul producției la începutul orizontului de planificare.

Echivalent putem scrie

$$y_t = max\{a_t(x_t - x_{t-1}) , b_t(x_{t-1} - x_t)\}.$$

Funcția obiectiv se scrie deci

$$f = \sum_{t=1}^{n} (c_t I_t + y_t) .$$

În actuala formă obiectivul este neliniar. Liniarizarea se face prin adăugarea restricțiilor:

$a_t(x_t - x_{t-1}) \geq y_t$

$b_t(x_{t-1} - x_t) \geq y_t$

$y_t \geq 0$, cu $t = 1, ..., n.$

Modelul final este:

$$\begin{cases} a_t x_{t-1} - a_t x_t + y_t \leq 0 \\ -b_t x_{t-1} + b_t x_t + y_t \leq 0 \\ x_t + I_{t-1} - I_t = r_t \\ x_t, y_t, I_t \geq 0,\ t = 1,2,...,n \\ (min) f = \sum_{t=1}^{n} (c_t I_t + y_t) \end{cases}$$

unde I_0 , x_0 sunt date iar I_n se specifică sau nu după dorință.

2-5. Conducerea unei firme doreşte elaborarea unui program de fabricație a unui anumit produs pentru următoarele T = 6 luni. Condițiile de care trebuie să țină seama sunt următoarele:

1) Nivelele probabile ale cererii viitoare au fost estimate astfel:

Luna t	I	II	III	IV	V	VI
Cerere (unități de produs) D_t	6000	6500	7000	2500	6000	6000

2) În fiecare lună, conducerea firmei trebuie să decidă:

- să nu producă bunul considerat;
- să îl producă în regim de lucru normal;
- să îl producă în regim de lucru prelungit.

Într-un regim de lucru normal (notat A) se pot realiza lunar până la P_A = 5000 unități la un cost C_A = 100000 unități monetare. În regimul prelungit (notat B) producția poate fi de cel mult P_B = 7500 unități şi implică un cost C_B = 150000 u.m.. Costurile C_A şi C_B au rezultat în urma unor negocieri cu sindicatele şi sunt independente de volumul producției lunare efectiv realizate.

3) S-a estimat că trecerea de la regimul de lucru normal într-o lună la regimul prelungit în luna următoare ar implica un cost suplimentar C_{AB} = 15000 u.m.. Orice altă schimbare a regimului de lucru de la o lună la alta nu implică costuri semnificative.

4) În cazul în care s-a decis fabricarea produsului într-o anumită lună, volumul producției trebuie să fie de cel puțin P_{min} = 2000 unități, indiferent de regimul de lucru adoptat.

5) Există un stoc inițial I_{in} = 3000 unități din produsul considerat iar în luna anterioară primei luni din noul orizont de planificare s-a lucrat în regim normal. La sfârşitul lunii a şasea nivelul stocului de produse finite trebuie să fie de cel puțin I_{fin} = 2000 unități. Pe parcurs nu este permisă ruptura de stoc, altfel spus, în fiecare lună, cererea trebuie să fie acoperită din stocul de produse de la sfârşitul lunii anterioare şi din producția lunii curente.

6) Pentru bunurile rămase în stoc la sfârşitul fiecărei luni s-a estimat un cost de stocare c = 2 u.m./unitatea de produs.

7) Obiectivul urmărit de conducerea firmei este minimizarea cheltuielilor totale de producție-stocare.

Probleme:

a) Să se elaboreze un model matematic pentru situația descrisă;

b) Încercați să construiți, într-o manieră euristică variante de program care să satisfacă cerințele enunțate; justificați opțiunile propuse;

c) Reluați chestiunea b) în cazul următoarelor estimări ale cererii viitoare:

c1)

Luna t	I	II	III	IV	V	VI
Cerere (unități de produs) D_t	6000	6500	7000	2500	6000	6000

c2)

Luna t	I	II	III	IV	V	VI
Cerere (unităţi de produs) D_t	6000	6500	7000	2500	6000	6000

Toate celelalte elemente rămân neschimbate.

Soluții

a) Elaborarea modelului presupune alegerea variabilelor, scrierea restricțiilor şi a funcției obiectiv.

I. Alegerea variabilelor modelului

În fiecare lună conducerea firmei trebuie să decidă:

- dacă se va lucra în regim normal sau nu;
- dacă se va lucra în regim prelungit sau nu;
- dacă este cazul să se treacă de la regimul normal la cel prelungit;
- care va fi nivelul producției în cazul în care s-a hotărât ca în luna respectivă produsul considerat să fie fabricat;
- care va fi nivelul stocului la sfârşitul lunii (după cum vom vedea, producția lunară şi stocul la sfârşitul lunii nu sunt independente; nivelurile lunare ale stocului de produse finite afectează costul întregului program de activitate).

Primele trei decizii sunt de tipul DA/NU şi, ca urmare, le vor fi ataşate următoarele variabile binare:

$$x_t = \begin{cases} 1 \text{ daca în luna } t \text{ se va lucra în regim normal} \\ 0 \text{ în caz contrar} \end{cases}, \ t = 1, \ldots, T$$

$$y_t = \begin{cases} 1 \text{ dacăîn luna } t \text{ se va lucra în regim prelungit} \\ 0 \text{ în caz contrar} \end{cases}, \ t = 1, \ldots, T$$

$$z_t = \begin{cases} 1 \text{ daca la începutul lunii } t \text{ s-a decis trecerea de la} \\ \qquad \text{regimul normal la regimul prelungit} \\ 0 \text{ în caz contrar} \end{cases}, \quad t = 1, \ldots, T$$

Cele trei tipuri de variabile nu sunt independente. Astfel:

- dacă în luna t s-a decis fabricarea produsului, regimul de lucru este unul singur fie cel normal, fie cel prelungit; de aici avem relația

$$x_t + y_t \leq 1, \ t = 1, \ldots, T \qquad (2.\ 16)$$

- trecerea, în luna t , de la regimul normal la cel prelungit presupune că în luna anterioară $t - 1$ s-a lucrat în regim normal iar în luna t s-a decis lucrul în regim prelungit. Formal:

$z_t = 1$ dacă şi numai dacă $x_{t-1} = 1$ şi $y_t = 1$

(cu $x_0 = 1$ în cazul primei luni $t = 1$). Rezultă relația neliniară

$$z_t = x_{t-1} \cdot y_t, \quad t = 1, \ldots, T \qquad \text{(cu } x_0 = 1) \qquad (2.17)$$

În continuare vom nota:

- $P_t \equiv$ nivelul producţiei în luna t, $t = 1, \ldots, T$;
- $I_t \equiv$ nivelul stocului de produse finite la sfârşitul lunii t.

Evident P_t nu poate lua valori negative: $P_t \geq 0$.

Vom avea şi $I_t \geq 0$ din cerinţa evitării rupturilor de stoc.

Există următoarea ecuaţie de balanţă:

(Stocul la sfârşitul lunii *t*) = (Stocul la începutul lunii *t*) ≡ (Stocul la sfârşitul lunii anterioare *t-1*) + (Producţia lunii *t*) - (Cererea lunii *t*)

Formal:

$$I_t = I_{t-1} + P_t - D_t, \qquad t = 1, \ldots, T,$$

cu $I_0 = I_{in}$ (în cazul $t = 1$).

Variabilele P_t pot fi eliminate în felul următor:

$$P_t = I_t - I_{t-1} + D_t, \qquad t = 1, \ldots, T. \qquad (2.18)$$

II. Restricţiile modelului

La relaţiile (2.16) şi (2.17) mai trebuie adăugată formalizarea condiţiei: *"în fiecare lună în care s-a decis fabricarea produsului nivelul producţiei trebuie să fie situat între nivelul minim P_{min} admis şi nivelul maxim corespunzător regimului de lucru adoptat"*, care arată astfel:

$$P_{min}(x_t + y_t) \leq P_t \leq P_A \cdot x_t + P_B \cdot y_t. \qquad (2.19)$$

Într-adevăr dacă s-a decis ca în luna t să nu se producă, atunci $x_t = y_t = 0$, de unde $Pt = 0$. Dacă s-a hotărât să se lucreze în regim normal atunci $x_t = 1$, $y_t = 0$ (din cauza relaţiei (2.16)), şi (2.19) devine $P_{min} \leq P_t \leq P_A$. Dacă se va trece la regim prelungit atunci $x_t = 0$, $y_t = 1$ astfel că $P_{min} \leq P_t \leq P_B$.

Să observăm că (2.19) asigură şi îndeplinirea condiţiei de nenegativitate $P_t \geq 0$.

Trebuie avut în vedere şi faptul că, la finele orizontului de planificare, stocul de produse finite trebuie să fie cel puţin la nivelul valorii minime specificate, de unde relaţia:

$$I_t \geq I_{fin} \ . \tag{2.20}$$

III. Funcția obiectiv

Costul total al programului de activitate rezultă din însumarea costurilor lunare, costuri care depind de deciziile adoptate cu privire la regimul de lucru şi la stocurile de produse finite.

a) Costul lunar corespunzător deciziilor privind regimul de lucru are expresia:

$$C_A \cdot x_t + C_B \cdot y_t + C_{AB} \cdot z_t.$$

Într-adevăr, valorile posibile ale acestei expresii sunt:

- 0 dacă $x_t = y_t = 0$ (şi de aici $z_t = 0$ conform (2.17));
- C_A dacă $x_t = 1,\ y_t = 0$ (şi de aici $z_t = 0$ conform (2.17)), cu alte cuvinte dacă regimul de lucru adoptat este cel normal;
- C_B dacă $x_t = 0,\ y_t = 1$ şi $x_{t-1} = 0$ (implicând $z_t = 0$), adică în situația în care în luna t se lucrează în regim prelungit şi în luna anterioară fie că s-a lucrat în acelaşi regim, fie că nu s-a produs bunul considerat;
- $C_B + C_{AB}$ dacă $x_t = 0,\ y_t = 0$ şi $x_{t-1} = 1$ (implicând $z_t = 1$ conform (2.17)), adică în situația în care în luna anterioară s-a lucrat în regim normal iar în luna curentă se va lucra în regim prelungit.

b) Costul lunar de stocare are expresia $c \cdot I_t$.

Rezultă în final următoarea expresie pentru funcția obiectiv:

$$f = \sum_{t=1}^{T} (C_A \cdot x_t + C_B \cdot y_t + C_{AB} \cdot z_t + c \cdot I_t) \tag{2.21}$$

IV. Modelul matematic – forma finală

Recapitulând relațiile (2.16) – (2.21) rezultă următorul model de programare MIXTĂ

$$\begin{cases} (min) f = \sum_{t=1}^{T} (C_A \cdot x_t + C_B \cdot y_t + C_{AB} \cdot z_t + c \cdot I_t) \\ x_t + y_t \leq 1 \\ z_t = x_{t-1} \cdot y_t \quad cu\ x_0 = 1 \\ P\,min(x_t + y_t) - D_t \leq I_t - I_{t-1} \leq P_A \cdot x_t + P_B \cdot y_t - D_t, \quad I_0 = I_{in} \\ I_t \geq I_{fin} \\ x_t,\ y_t,\ z_t \in \{0,1\} \\ I_t \geq 0 \end{cases} \tag{2.22}$$

Observație: Modelul matematic construit este neliniar din cauza relației (2.17). Deoarece variabilele implicate sunt BIVALENTE putem înlocui relația neliniară (2.17) cu două relații liniare pe baza următorului rezultat:

Dacă X, Y, Z sunt variabile bivalente atunci

$$Z = X \cdot Y \Leftrightarrow X + Y - 1 \leq Z \leq (X+Y)/2.$$

Pentru demonstrație înlocuim tripletul *(X, Y, Z)* cu fiecare din cele 2^3 posibilități "binare". Din tabelul de mai jos rezultă că egalitatea neliniară din stânga este adevărată atunci şi numai atunci când cele două inegalități liniare din dreapta sunt simultan adevărate.

X	Y	Z	XY	X + Y - 1	(X + Y)/2	Z = XY	X + Y – 1 ≤ Z	Z≤(X + Y)/2
0	0	0	0	-1	0	A	A	A
1	0	0	0	0	1/2	A	A	A
0	1	0	0	0	1/2	A	A	A
1	1	0	1	1	1	F	F	A
0	0	1	0	-1	0	F	A	F
1	0	1	0	0	1/2	F	A	F
0	1	1	0	0	1/2	F	A	F
1	1	1	1	1	1	A	A	A

În concluzie, înlocuind în (2.22)

$z_t = x_{t-1} \cdot y_t$ cu $x_{t-1} + y_t - 1 \leq z_t \leq (x_{t-1} + y_t)/2, \qquad t = 1, \ldots, T.$

Situația prezentată a fost modelată ca o problemă de programare liniară mixtă (în variabile continui nenegative şi variabile bivalente).