INTRODUCERE

Din ce în ce mai mult, culegerea, înregistrarea, prelucrarea, transferul şi utilizarea informației capătă ponderi tot mai însemnate în activitatea de gestiune şi conducere a firmei. Datorită volumului şi dinamicii extraordinare a informațiilor pe care întreprinderea trebuie să le prelucreze în timp cât mai scurt, utilizarea calculatorului dotat cu soft specializat în acest scop a devenit deja o necesitate. De fapt, în ultimii ani asistăm la o deplasare a centrului de greutate dinspre "a şti ce trebuie făcut" către "a spune calculatorului (robotului, liniei automate de producție etc.) ce problemă trebuie rezolvată şi a afla de la el cum anume trebuie făcut".

Dar, pentru a primi variante şi strategii pertinente privind rezolvarea anumitor probleme cu care se confruntă la un moment dat, specialistul (analistul economist) trebuie să explice calculatorului problema de rezolvat într-un limbaj accesibil maşinii. În cvasi-totalitatea cazurilor, acest lucru echivalează cu trecerea de la problema economică reală la o reprezentare abstractă a acesteia, adică la un *model al problemei* (în cele mai multe situații un model matematic sau grafic). Într-o a doua fază de rezolvare a problemei reale, ulterior scrierii modelului acesteia, analistul trebuie să indice calculatorului metoda/algoritmul ce vor fi utilizate pentru rezolvarea modelului.

Dispunând de un set de modele şi un ansamblu de metode şi algoritmi dedicați rezolvării acestora, activitatea analistului economist se transformă într-una de alegere a modelului cu care problema reală se va identifica, precum şi a metodelor adecvate de rezolvare a acestuia. Concret, activitatea de execuție (rezolvarea problemei economice reale) se transformă într-una de decizie (alegerea cu ajutorul calculatorului a celei mai bune strategii de rezolvare a problemei reale şi utilizarea ei).

Scopul declarat al cursului de față este acela de a-i familiariza pe studenții economişti cu metodologia modelării activității firmei, prin prezentarea unora dintre cele mai importante şi utile modele la nivel de întreprindere: *modele de producție, modele de distribuție, modele de stabilire a prețului, modele de gestiune a resurselor umane, modele de gestiune financiară, modele decizionale*.

Deprinderea tehnicilor de construire a modelelor şi a abilității de utilizare a lor la rezolvarea diferitelor probleme cu care se confruntă firma sunt pe cât de utile, pe atât de necesare economiştilor şi în special economiştilor informaticieni, al căror rol principal constă în asigurarea unui grad din ce în ce mai mare de informatizare a activității firmei. Deoarece noile limbaje şi medii de programare oferă facilități din ce în ce mai mari creatorilor de soft ele devenind pe zi ce trece tot mai uşor de înţeles şi utilizat, eforturile economiştilor informaticieni trebuie să se concentreze asupra înţelegerii corecte şi complete a problemelor de rezolvat şi, îndeosebi, asupra modelării lor cât mai exacte astfel încât metoda de rezolvare aleasă să corespundă modelului creat, iar soluţiile obţinute să răspundă problemei reale cu un grad de acurateţe cât mai mare. Sugestiv, procesul de rezolvare a unei probleme utilizând modelarea este prezentat în Figura 1.

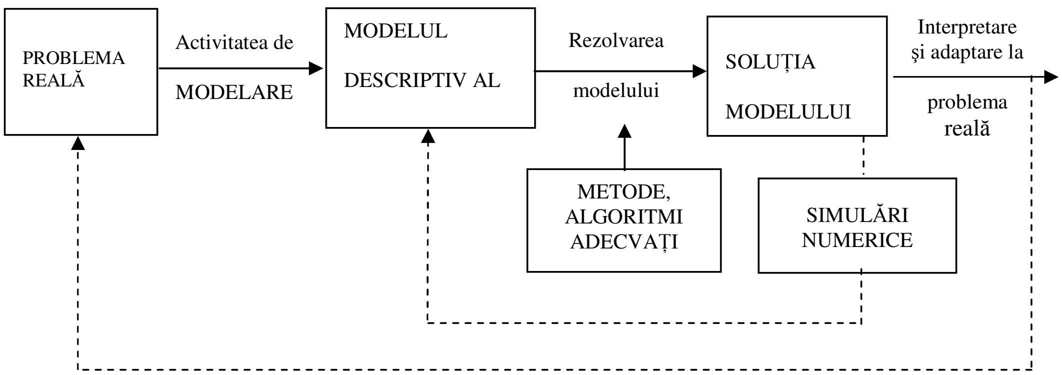


Figura 1 Rezolvarea problemelor economice utilizând modelarea

Realizat atât în scopul cunoaşterii mai profunde a realităţii, cât şi pentru fundamentarea intervenţiilor asupra acesteia cu scopul de a-i imprima o evoluţie satisfăcătoare sau unele calităţi de funcţionalitate dorite în condiţii de eficienţă, *modelul decizional* devine principalul instrument de lucru în evaluarea consecinţelor potenţiale ale variantelor decizionale.

Principalele cerinţe impuse unui model de calitate sunt:

- *coerenţa* - calitatea reprezentării de a fi un tot armonios, legăturile între părţile sale - fizice sau logice - atribuindu-i această calitate;

- *corectitudinea* - proprietatea modelului de a nu deforma caracterul real al relaţiilor reprezentate;

- *consistenţa* - este atributul care permite aprecierea gradului în care au fost reprezentate elementele componente ale procesului modelat prin relaţiile dintre acestea;

- *eficienţa* - este calitatea reprezentării realizate de model de a da răspuns problemelor în care este interesat utilizatorul, la un cost acceptabil, deci cu un efort de construire şi utilizare considerabil mai mic în raport cu efectele economice ale studiului;

- *completitudinea* - înţeleasă în sensul cuprinderii tuturor elementelor componente şi a relaţiilor dintre ele.

Modelul va fi întotdeauna o reprezentare simplificată, dar şi simplificatoare a realității, care permite cercetătorului acțiunea conştientă, bazată pe raționament asupra procesului modelat.

În aceste condiții, procesul $\mathcal{P}$, caracterizat prin specificarea mulțimii elementelor sale, $\mathcal{E}$, şi a mulțimii relațiilor dintre acestea $\mathcal{R}$, va fi reprezentat suficient de bine prin modelul $\mathcal{M}$ constând dintr-o mulțime de elemente $\mathcal{E}'$, şi mulțimea relațiilor dintre acestea, $\mathcal{R}'$, dacă se poate stabili corespondența biunivocă între elementele mulțimilor $\mathcal{E}$ şi $\mathcal{E}'$, pe de o parte, şi ale mulțimilor $\mathcal{R}$ şi $\mathcal{R}'$, pe de altă parte. De altfel, însăşi reprezentarea $\mathcal{P} = \{\mathcal{E}, \mathcal{R}\}$ poate fi considerată ca un model extrem de general al procesului $\mathcal{P}$. Construirea modelului $\mathcal{M} = \{\mathcal{E}', \mathcal{R}'\}$ constă, de fapt, în identificarea elementelor mulțimii $\mathcal{E}$ şi a relațiilor dintre ele, $\mathcal{R}$, reprezentate prin mulțimile $\mathcal{E}'$ şi $\mathcal{R}'$, pentru care se realizează corespondențele

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{P} & = & \{\mathcal{E} & , & \mathcal{R}\} \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \mathcal{M} & = & \{\mathcal{E}' & , & \mathcal{R}'\} \end{array}$$

Construirea unui model ca reprezentare satisfăcătoare este, de aceea, un proces iterativ cu perfecționări succesive ale reprezentării realizate, constând în culegerea de date şi interpretarea lor în vederea cunoaşterii tot mai detaliate a mulțimilor $\mathcal{E}$ şi $\mathcal{R}$ pentru realizarea reprezentării $\mathcal{M} = \{\mathcal{E}', \mathcal{R}'\}$ şi validarea acesteia.

Acest proces iterativ este reprezentat schematic în Figura 2.

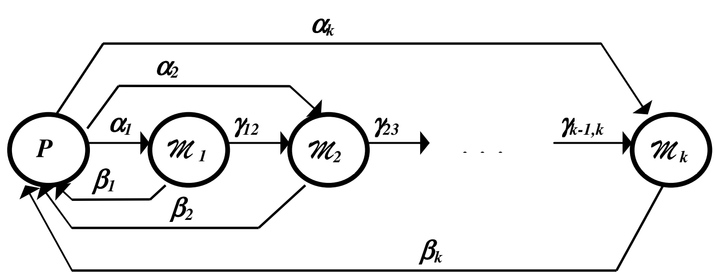


Figura 2 Reprezentarea schematică a procesului de construire a modelului $\mathcal{M}$

În schema din Figura 2, $\mathcal{P}$ reprezintă procesul modelat, iar $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_k$ sunt versiuni ale modelului procesului $\mathcal{P}$. Operatorii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ simbolizează culegerea şi interpretarea datelor, iar $\gamma_{12}, \gamma_{23}, \ldots, \gamma_{k-1,k}$ procesul de învățare şi conservare a calităților versiunilor anterioare ale modelului, a câştigului pe planul cunoaşterii în scopul realizării unei reprezentări satisfăcătoare a procesului modelat confirmată la etapa de validare pentru fiecare versiune, etapă reprezentată în schemă prin operatorii $\beta_1, \beta_2 ..., \beta_k$.

Procesul iterativ se termină la etapa k, modelul $\mathcal{M}_k$ fiind adoptat în continuare ca reprezentare a procesului $\mathcal{P}$. Realizarea modelului $\mathcal{M}_k$ sugerează caracterul convergent al procesului iterativ, mai precis *convergența conceptuală* a acestuia.

Vom particulariza în cele ce urmează aceste câteva generalități privind procesul de modelare, la cazul unor probleme concrete ce trebuie rezolvate la nivelul firmei: stabilirea structurii de producție, optimizarea fluxurilor şi a stocurilor de factori de producție, stabilirea prețurilor pentru produsele firmei, gestiunea resurselor umane, optimizarea fluxurilor financiare şi a activității decizionale.

CAPITOLUL 1

MODELAREA ACTIVITĂȚII PRODUCTIVE A FIRMEI

1.1 Specificul activității productive

În esență, decizia de producție constituie răspunsul la întrebarea: *"Ce tipuri de produse, în ce cantitate şi ce sortimente calitative urmează să producă firma într-o anumită perioadă ?"*. Aşa cum se observă, întrebarea conține mai multe aspecte, prin urmare activitatea de producție a firmei însumează adoptarea mai multor decizii şi anume:

1) Decizia referitoare la *structura de fabricație* pentru perioada analizată;

2) Decizia privind *cantitatea* care urmează a se fabrica din fiecare sortiment;

3) Decizia privind defalcarea producției pe diferite *sortimente calitative.*

---

1) Decizia referitoare la ***structura de fabricație*** este una dintre cele mai importante şi complexe probleme cu care se confruntă firma pe termen mediu. În adoptarea acestei decizii firma trebuie să ia în considerare următoarele elemente:

a. Nomenclatorul de fabricație uzual al firmei şi catalogul produselor noi pe care aceasta urmează a le lansa în fabricație;

b. Rezultatele studiilor de marketing referitoare la preferințele consumatorilor privind tipurile de produse, pe categorii de calitate, realizate de către firmă;

c. Rezultatele studiului asupra caracteristicilor produselor similare realizate de către firmele concurente;

d. Tipurile de materii prime, materiale, utilaje şi tehnologii solicitate de fiecare sortiment în parte şi disponibilele din acestea în perioada respectivă, precum şi categoriile profesionale de personal pe diferite trepte de calificare necesare realizării produselor (prestării serviciilor);

e. Sezonul pentru care se pregăteşte fabricația, dacă produsele au caracter sezonier;

f. Rentabilitatea diferitelor tipuri de produse, în acord cu obiectivele firmei în perioada respectivă: maximizarea venitului sau profitului, minimizarea costurilor de fabricație.

2) Decizia privind ***cantitatea care urmează a se fabrica*** din fiecare categorie de produs în parte are drept variabile de intrare următoarele elemente:

a. Nivelul cererii pieței acordat cu segmentul de piață deținut de firmă şi, desigur, cu obiectivele pe termen lung, mediu şi scurt ale firmei;

b. Gradul de rentabilitate al produselor corelat cu politica de dezvoltare a firmei şi cu cea referitoare la atitudinea față de consumator;

c. Disponibilitatea factorilor de producție necesari fabricării produselor şi restricțiile referitoare la consumul acestora.

Firma urmează a stabili cantitatea din diferitele produse pe care o va lansa pe piață ținând seama de tipul de piață pe care activează şi de caracteristicile acesteia, de volumul optimal al producției raportat la comportamentul celorlalte firme de pe piață, de politica de creştere pe perioada analizată, precum şi de dezvoltarea economică a zonei în care urmează a-şi desface produsele, aspect care poate induce modificări deloc neglijabile în evoluția pieței respective.

3) Decizia privind ***defalcarea producției pe diferite sortimente calitative*** trebuie să țină seama, în primul rând, de categoria de consumatori căreia i se adresează produsele firmei. În acest scop, efectuarea unui studiu de marketing oferă firmei informația necesară referitoare la structura masei consumatorilor în raport cu preferințele lor pentru produse de calitate slabă, medie, ridicată, extra sau lux. Deşi unul din dezideratele permanente ale firmei trebuie să fie acela de a-şi îmbunătăți continuu calitatea produselor, ar fi lipsit de realism şi de eficiență ca ea să realizeze numai produse de lux, de exemplu, atunci când consumatorii care au acces la aceste produse reprezintă doar 1% din masa cumpărătorilor şi utilizatorilor lor.

În adoptarea deciziei de producție, firma poate utiliza metode şi modele economico-matematice, cele mai larg răspândite fiind modelele de programare liniară uni şi/sau multiobiectiv şi modele de optimizare neliniară vizând stabilirea punctelor de echilibru cantitate-preț pentru fiecare produs pe perioade date.

Principala problemă decizională care confruntă firma în domeniul producției, o constituie *determinarea structurii optimale de fabricație pe o anumită perioadă*. Vom prezenta, în continuare, modalitatea practică de modelare şi soluționare a acestei probleme decizionale, insistând şi asupra modalității de considerare a influenței riscului şi a incertitudinii în adoptarea deciziei.

Considerăm o firmă productivă al cărei nomenclator de fabricație cuprinde un număr de n produse notate $P_1, P_2, ..., P_j, ..., P_n$. Pentru fabricarea acestora, firma utilizează anumite resurse, notate $R_1, R_2, ..., R_i, ..., R_m$, aflate în cantități limitate la dispoziția firmei. De asemenea, firma cunoaşte consumurile specifice din fiecare resursă R_i necesare pentru fabricarea unui produs de tip P_j, consumuri grupate în matricea consumurilor specifice (sau matricea tehnologică) $A = (a_{ij})_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}}$, precum şi cantitățile disponibile din fiecare resursă în parte în perioada analizată, notate $b_i, i = \overline{1,m}$, şi prețurile unitare ale produselor P_j, notate $c_j, j = \overline{1,n}$.

Problema decizională pe care firma o are de rezolvat este următoarea: *care sunt cantitățile optime x_1^*, x_2^*, ..., x_n^* din produsele P_1, ..., P_n pe care trebuie să le producă în perioada analizată, astfel încât venitul firmei să fie maxim.*

De cele mai multe ori, în practică, firmele rezolvă această problemă raportându-se la producția realizată în perioadele anterioare şi la volumul producției contractat cu beneficiarii, fără a recurge la modelarea şi rezolvarea problemei utilizând metode fundamentate ştiințific.

Vom prezenta, în continuare, două posibilități de abordare şi soluționare a acestei probleme decizionale bazate pe modelare şi analiză economico-matematică: una *liniară* iar cealaltă *neliniară*.

1.2 Utilizarea modelării liniare

Revenind la problema enunțată anterior, firma are de rezolvat un model de optimizare (maximizarea venitului total obținut din vânzarea produselor), cu restricții (încadrarea în cantitățile de resurse disponibile). Formal, cu notațiile introduse anterior, putem scrie:

$$(P)\left\{\begin{array}{lr} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \le b_1 & (1.1.1) \\ & \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \le b_i & (1.1.i) \\ & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m & (1.1.m) \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,n} & (1.2) \\ (\max) f = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n & (1.3) \end{array}\right.$$

Grupul de restricții (1.1) specifică faptul că firma nu poate depăşi cantitățile b_i din resursele $R_i, i = \overline{1,m}$, în perioada analizată, iar restricțiile (1.2) indică faptul că firma nu poate realiza cantități negative x_j din produsele P_j pe care le produce. Relația (1.3) cuantifică obiectivul firmei, maximizarea venitului total, f purtând numele de funcție obiectiv sau funcție de eficiență.

Introducând notațiile matriciale:

$$A = (a_{ij})i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad c = [c_1, \ldots, c_j, \ldots, c_n] \ ,$$

modelul (P) se poate scrie şi în următoarea formă restrânsă:

$$(P)\begin{cases} Ax \le b & (1.1') \\ x \ge 0 & (1.2') \\ (max)f = cx & (1.3') \end{cases} .$$

În locul maximizării venitului total, firma îşi poate propune şi alte obiective precum maximizarea profitului sau a unei funcții de utilitate a veniturilor, minimizarea costurilor de fabricație etc.. În acest caz, putem înlocui expresia (1.3) cu expresia

$$(optim)\, f(x) \ ,$$

unde operatorul *(optim)* = {*(max)* sau *(min)*}.

Notăm cu $\mathcal{A}$ mulțimea vectorilor *x* ai cantităților de produse ce urmează a fi fabricate de către firmă, vectori care satisfac sistemul de restricții (1.1) şi condițiile de negativitate (1.2), adică:

$$\mathcal{A} = \left\{ x \in R^n \,/\, Ax \le b, x \ge 0 \right\}. \qquad (1.4)$$

Problema decizională a determinării structurii optimale a producției poate fi formulată astfel:

$$\text{"Să se determine } x^* \in \mathcal{A} \text{ astfel încât} \quad f(x^*) = \underset{x \in A}{(opt)} f(x) \text{"} \qquad (1.5)$$

Metoda propusă şi studiată de către Cercetarea Operațională pentru determinarea structurii optimale a producției *x** este *programarea liniară*, algoritmul cu ajutorul căruia se rezolvă modelele de programare liniară, algoritmul *SIMPLEX,* fiind construit de către matematicianul american George Dantzig acum peste 50 de ani.

Caracterul de liniaritate al modelului *(P)* este dat de următoarele ipoteze de natură economică şi matematică:

1. Cantitățile de resurse utilizate sunt proporționale cu nivelul activităților, respectiv cu cantitățile de produse ce vor fi realizate;

2. Fiecare resursă este caracterizată printr-o ecuație de echilibru (vezi relația 1.1), termenii acesteia reprezentând fluxuri de intrări şi ieşiri care se referă la produsele pentru care se consumă resursa respectivă;

3. Liniaritatea funcției obiectiv, ceea ce presupune proporționalitatea între cantitatea realizată din fiecare produs şi contribuția sa la formarea funcției obiectiv, precum şi independența contribuțiilor diferitelor produse la aceasta;

4. Negativitatea cantităților de produse care se vor realiza.

Informațiile necesare elaborării acestor modele se obțin parcurgând următoarele etape:

a. Analiza ansamblului de activități al firmei. Determinarea tipurilor de produse/servicii pe care le poate realiza firma şi stabilirea caracteristicii (sau a caracteristicilor) cu ajutorul căreia se apreciază eficiența sistemului;

b. Determinarea categoriilor de resurse $R_i, i = \overline{1,m}$ care participă la fabricarea produsului $P_j, j = \overline{1,n}$, şi stabilirea unităților de măsură a resurselor în concordanță cu cele ale produselor;

c. Determinarea, în baza tehnologiilor de fabricație, a coeficienților consumurilor specifice a_{ij}, ca factori de proporționalitate între nivelurile x_j ale cantităților de produse şi fluxurile de resurse;

d. Determinarea relațiilor dintre firmă şi mediul exterior, prin identificarea fluxurilor de intrări/ieşiri de factori de producție şi/sau produse;

e. Stabilirea relațiilor de echilibru consum/disponibil pentru activitățile firmei.

Ipotezele în care pot fi construite şi utilizate modelele liniare [30], [31] nu sunt verificate întotdeauna în practică. Modelul *(P)* presupune, de exemplu, existența unei singure funcții obiectiv. În realitate, decidenții operează în majoritatea cazurilor în prezența unor obiective multiple. În această situație, posibilitățile de adoptare a deciziei privind structura optimală de fabricație sunt oferite de metodele de rezolvare a modelelor liniare multicriteriale.

Pe de altă parte, utilizarea acestor modele poate fi făcută doar în condiții de certitudine. Astfel, în perioada analizată, firma cunoaşte cu certitudine cantitatea de care va dispune din fiecare resursă în parte, precum şi prețul la care va vinde pe piață fiecare produs. Aceste informații pot fi, însă, cunoscute cu certitudine doar pe termen scurt. Pe termen mediu sau lung, o serie de factori cum sunt prețurile materiilor prime şi materialelor, costul energiei electrice, nivelul salariiilor, numărul firmelor care realizează produse similare şi cantitatea de produse pe care acestea o vor fabrica, introduc elemente de incertitudine relative la disponibilul de resurse sau prețurile produselor fabricate de către firmă. Pe de altă parte, pe termen lung, firma poate introduce în fabricație noi produse şi poate retrage din fabricație unele tipuri fabricate în prezent, la fel de bine cum poate achiziționa noi tehnologii de realizare a produselor cu consumuri specifice de resurse diferite față de tehnologiile utilizate în prezent. De asemenea, crizele de resurse care pot apare pe termen lung pot duce la apariția a noi restricții asupra cantităților de produse x_j care urmează a fi fabricate.

În prezența acestor condiții de incertitudine, structura optimală de fabricație x^* determinată de firmă astăzi, nu va mai fi eficientă peste un an sau poate chiar pentru semestrul următor. Firma are la dispoziție în acest caz, următoarele alternative[1)]:

1. Să adapteze în permanență structura optimală de producție x^* la modificările survenite, folosind tehnica postoptimizării în programarea liniară, astfel:

- reoptimizând modelul *(P)* prin modificarea vectorului c atunci când este necesară o modificare a prețurilor produselor;

- reoptimizând *(P)* prin modificarea vectorului b al cantităților disponibile de resurse;

- reoptimizând *(P)* prin adăugarea de noi coloane matricii A, atunci când firma introduce noi produse în fabricație;

- reoptimizând *(P)* prin modificarea unor coloane din A în cazul modificării tehnologiei de fabricație;

- adăugând noi restricții la modelul *(P)* atunci când alte resurse devin deficitare sau când piața impune limitări ale cantităților de produse ce pot fi vândute.

Postoptimizarea constă în studiul comportamentului soluției optime a modelului *(P)* în condițiile modificărilor survenite şi determinarea unei noi soluții în cazul în care cea anterioară nu se dovedeşte a fi în continuare optimală.

2. Să ia în calcul eventualele variații care pot apare în prețurile factorilor de producție şi în cel al produselor firmei, considerând aceste elemente ca variabile depinzând de unul sau mai mulți parametri:

---

1) Tehnicile post-optimizării şi parametrizării în programarea liniară sunt tratate deosebit de detaliat în literatura de specialitate ([31]), motiv pentru care prezentarea lor nu face obiectul lucrării de față.

- În cazul în care cantitatea de resurse disponibilă depinde de prețul acestora pe perioada analizată, firma va modela decizia de producție introducând în modelul *(P)* un vector al disponibilelor $b(\alpha)$, unde α este un parametru care măsoară aşteptările firmei relative la variația prețurilor pe piața factorilor. Modelul devine în acest caz:

$$(P^{\alpha})\begin{cases} Ax \le b(\alpha) \\ x \ge 0 \\ (opt) f(x) \end{cases} \tag{1.6}$$

- De asemenea, firma poate previziona un anumit ritm de creştere sau scădere a prețului produselor sale, ritm pe care îl va include în model printr-un parametru de variație a vectorului prețurilor $c(\lambda)$. Modelul pe care îl va rezolva firma în această situație va fi:

$$(P^{\lambda})\begin{cases} Ax \le b \\ x \ge 0 \\ (opt) f(x) = c(\lambda)x \end{cases} \tag{1.7}$$

Tehnica programării parametrice se bazează pe determinarea unor soluții optimale pe intervale de optimalitate ale valorilor parametrilor considerați. Utilizarea acestei tehnici de modelare permite decidentului să adapteze structura de fabricație în raport cu modificările survenite în condițiile în care firma îşi desfăşoară activitatea. Aplicabilitatea practică a metodei este condiționată, totuşi, de gradul de flexibilitate şi adaptabilitate al firmei în raport cu dinamica pieței, precum şi de caracteristicile procesului de producție şi ale produsului în sine.

1.3 Modele neliniare de producție

Cantitatea optimală de produs pe care firma o va realiza într-o anumită perioadă poate fi determinată utilizând şi tehnici neliniare de modelare şi optimizare. Utilitatea acestora este dovedită de faptul că, în practică, nu întotdeauna tehnologia firmei, funcția de profit sau funcția de cost, funcțiile de producție sau cele de cerere pot fi modelate utilizând expresii liniare. Din contră, în majoritatea cazurilor, interdependențele puternice dintre factorii de producție, tehnologie, produsul firmei şi piață, conduc la modele neliniare ale firmei.

În cadrul prezentei secțiuni vom considera firma ca o entitate a pieței care, în condițiile unor restricții impuse de posibilitățile sale tehnologice, urmăreşte să îşi maximizeze profitul. În acest scop, firma determină categoriile de produse/servicii (outputuri), pentru a căror realizare urmează să decidă asupra celui mai profitabil mod de a-şi utiliza resursele (inputuri). Relaţia inputuri-outputuri este exprimată în teoria microeconomică cu ajutorul *funcţiilor de producţie* [13], [35], [37], concept pe care îl vom prezenta după ce vom introduce mai întâi o descriere a posibilităţilor tehnologice ale firmei.

1.3.1 Modelarea posibilităţilor tehnologice ale firmei

În cele ce urmează, prin producţie vom înţelege transformarea factorilor de producţie, precum munca, materialele, utilajele şi alte bunuri de capital, în produse/servicii, de-a lungul unei perioade de timp.

Vom considera că pe piaţă există N bunuri. Unele dintre ele pot fi inputuri pentru firmă, altele pot fi outputuri, existând desigur şi produse care nu au nici o legătură cu firma. Posibilităţile tehnologice ale firmei sunt modelate de un set de vectori în $\mathbb{R}^N$ denumiţi *netputuri*. Termenul de netput este utilizat ca o generalizare a celui de input şi output. Pentru fiecare dintre cele N bunuri putem înregistra producţia firmei (outputul), utilizând valori pozitive sau consumul din acesta (inputul), utilizând valori negative. Posibilităţile tehnologice ale firmei vor fi date atunci de mulţimea tuturor vectorilor de netputuri de care firma este capabilă. Mulţimea tuturor vectorilor posibili de netputuri este o submulţime a lui $\mathbb{R}^N$, ea va fi notată cu $\mathcal{A}$ şi va fi numită ***mulţimea posibilităţilor tehnologice*** sau ***mulţimea tehnologică*** a firmei.

Elementele mulţimii $\mathcal{A}$ denumite ***netputuri*** sau ***programe de producţie*** ale firmei vor fi notate cu Z.

Pentru $N = 2$, deci în cazul în care pe piaţă există doar două produse, un input x şi un output y, $\mathcal{A}$ poate fi reprezentată precum în Figura 1.1. Evident că posibilităţile tehnologice ale firmei diferă în funcţie de orizontul de timp pe care această operează. De regulă, se presupune că firma are o mare flexibilitate în privinţa posibilităţilor tehnologice pe termen lung, astfel că unele netputuri sunt posibil de obţinut pe termen lung dar nu şi pe termen scurt.

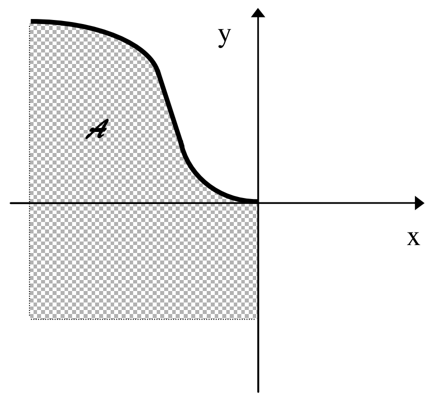


Figura 1.1 Mulțimea tehnologică a firmei

Pentru o mai mare claritate a expunerii, vom separa în cadrul unui vector netput, inputurile de outputuri în felul următor. Vom ordona indicii *1, 2, ..., N* astfel încât:

$$\underbrace{1, 2, \ldots, K}_{\text{indici ai inputurilor}} \qquad \underbrace{K+1, \ldots, M}_{\text{indici ai outputurilor}} \qquad \underbrace{M+1, \ldots, N}_{\text{indici ai produselor care nu au legătură cu firma (noputuri)}}$$

În mulțimea $\mathcal{A}$ convenim ca această separare să se scrie astfel: dacă $Z = (Z_1, \ldots, Z_N) \in \mathcal{A}$, atunci

$$\begin{cases} Z_i \le 0 & , \text{ pentru } i = 1,2,\ldots,K \\ Z_i \ge 0 & , \text{ pentru } i = K+1,\ldots,M \\ Z_i = 0 & , \text{ pentru } i = M+1,\ldots,N \end{cases}$$

Această separare nu exclude posibilitatea ca firma să aibă şi niveluri negative ale outputurilor sale, de exemplu în cazul în care acestea sunt inputuri potențiale de la alte momente ale procesului de producție.

Asupra elementelor vectorilor de netputuri *Z* vom face următoarea ipoteză:

Ipoteza 1.1 Dacă pentru un $i \in \{ K+1,\ldots,M \}, Z_i > 0$, atunci $Z_i < 0$ pentru cel puțin un $i \in \{ 1,2,\ldots,K \}$. Cu alte cuvinte, un nivel pozitiv al unuia dintre outputuri necesită anumite cantități pozitive de inputuri.

Pentru a evidenția clasificarea în inputuri, outputuri şi noputuri (produse care nu au legătură cu firma), vom introduce următoarea notație:

$x = (x_1, ..., x_K)$ - vectorul inputurilor (valori pozitive);

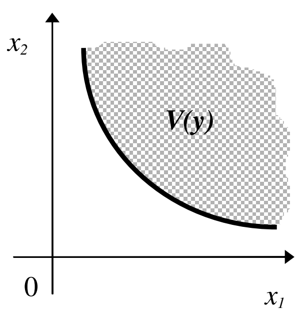
$y = (y_1, ..., y_M)$ - vectorul outputurilor.

Perechea de vectori $(x, y) \in R^{K+M}$ este o *combinație input-output admisibilă pentru firmă* dacă $Z = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_K, y_1, y_2, \ldots, y_M, 0, 0, \ldots 0) \in \mathcal{A}$.

Pentru ca un vector dat al outputurilor $y = (y_1, ..., y_M)$ să fie admisibil pentru firmă, condiția este să existe un vector de netputuri admisibil $Z \in \mathcal{A}$ care să conțină vectorul y, adică să existe un vector de inputuri x, astfel încât $Z = (-x, y, 0) \in \mathcal{A}$.

Definiția 1.1 Mulțimea $V(y) = \{x \in R^K \,/\, x =$ inputuri necesare pentru a obține vectorul outputurilor y} poartă numele de ***mulțime necesară de inputuri***.

Pentru două inputuri, Figura 1.2 conține reprezentarea grafică a mulțimii $V(y)$.



$V(y) = \{x \in \Re^K /(x, y) \in \mathcal{A}\}$

Figura 1.2 Mulțimea necesară de inputuri

Mulțimea necesară de inputuri, $V(y)$, are următoarele proprietăți:

1. Este *nelimitată superior*: dacă $x \in V(y)$ şi $x' \geq x$, atunci $x' \in V(y)$.

2. Este *convexă*: dacă $x, x' \in V(y)$, atunci $\alpha x + (1-\alpha)x' \in V(y)$, cu $\alpha \in [0,1]$.

Convexitatea lui $\mathcal{A}$ implică , dar nu este implicată de convexitatea lui $V(y)$.

Proprietățile 1 şi 2 se referă la un vector y de outputuri. Putem discuta necesarul de inputuri pentru mai multe niveluri simultan, caz în care este natural să formulăm o proprietate generală a mulțimii $V(y)$, şi anume:

3. Dacă $y \geq y'$, atunci $V(y) \subseteq V(y')$.

Definiția 1.2 Frontiera mulțimii $V(y)$ este numită ***izocuanta outputului y***.

Mulțimile de inputuri necesare sunt adeseori reprezentate prin aceste izocuante, care sunt asemănătoare curbelor de indiferență (vezi Figura 1.3).

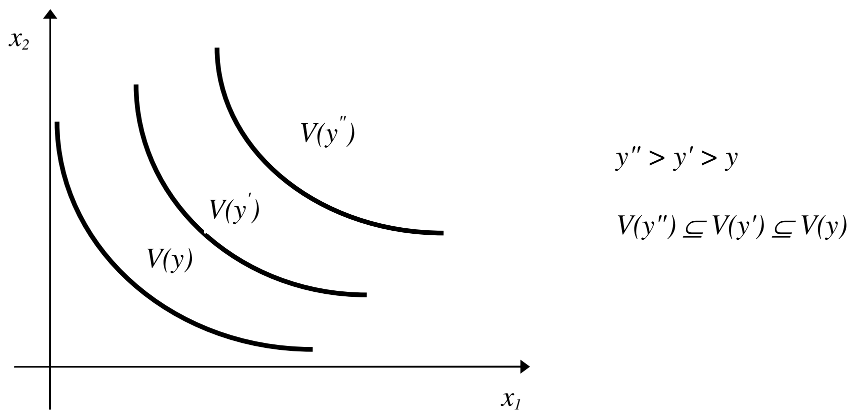


Figura 1.3

1.3.2 Funcțiile de producție

O funcție de producție poate fi exprimată printr-un tabel, un grafic sau o expresie de forma

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_K) \tag{1.8}$$

unde y, un anumit output, este o funcție de factorii input $x_1, x_2, \ldots, x_k$. De exemplu, x_1 poate fi muncă direct productivă, x_2 poate fi muncă indirect productivă, x_3 pot fi bunuri de capital precum utilaje și echipamente, x_4 pot fi materii prime, x_5 poate fi activitatea managerială, și așa mai departe. Toți acești factori de producție sunt agregați în mod uzual în doi factori de bază: *capitalul*, K, și *munca*, L, astfel că, în general,

$$y = f(K, L) \; . \tag{1.9}$$

Așa cum rezultă din (1.8) și (1.9), o funcție de producție este, pur și simplu, o relație input-output între unul sau mai mulți factori de producție și bunurile sau serviciile produse de către firmă. Această relație este analizată și cuantificată în cadrul studiului producției firmei astfel încât să poată fi determinată cea mai economică combinație de resurse necesare obținerii unui anumit nivel al outputului, sau poate fi utilizată în determinarea nivelului maxim al outputului posibil de obținut dintr-un nivel dat al unei combinații de inputuri.

Studiul funcțiilor de producție este, de asemenea, fundamental în analiza costului. O dată identificată funcția de producție a unei firme, funcția sa de cost poate fi derivată din funcția de producție presupunând cunoscute prețurile inputurilor pe piață.

La orice moment de timp, inputurile pot fi grupate în două categorii: *inputuri fixe* şi *inputuri variabile*. *Inputurile fixe* sunt în cea mai mare măsură inputurile de capital, în cantitatea sau numărul acestora firma neputând să efectueze modificări pe termen scurt (de exemplu: pământul, clădirile, utilajele). *Inputurile variabile* sunt inputuri ale căror niveluri sunt direct legate de volumul producției care se realizează (ore de lucru, kwh energie, unități de materie primă şi material etc.).

1. Funcții de producție cu un singur input variabil şi un singur output

Considerăm o firmă care realizează un singur output y, utilizând pentru aceasta un input variabil x_1 şi mai multe inputuri fixe $x_2, x_3, ..., x_K$. Expresia funcției sale de producție este:

$$y = f(x_1 | x_2, x_3, \ldots, x_K) \quad , \tag{1.10}$$

cantitatea de output y fiind rezultatul combinării unei cantități variabile a factorului input x_1 cu cantități fixe din ceilalți factori input $x_2, x_3, ..., x_K$. Problema fundamentală în studiul funcției de producție este aceea de a descoperi natura relației input-output, problemă care, în literatura de specialitate, poartă numele generic de "legea proporțiilor variabile" [35] sau "legea veniturilor (randamentului) descrescătoare". Esența acestei legi este redată în Figura 1.4.

În această figură sunt reprezentate curbele producției totale (TP_x), producției medii ($AP_x = y/x$) şi producției marginale (MP_x) cu

$$MP_x = \Delta y / \Delta x \text{ pentru valori discrete şi } MP_x = \frac{dy}{dx} \text{ pentru funcții continue,} \tag{1.11}$$

precum şi relațiile dintre acestea şi elasticitatea producției atunci când un singur input x variază iar firma produce un singur output y.

Legea venitului descrescător (sau a randamentului descrescător a factorilor input). Figura 1.4 ilustrează faptul că producția totală creşte odată cu creşterea cantității de input consumate, până la un anumit punct (A). Dincolo de acest punct de inflexiune, consumul unei unități în plus de input variabil aduce venituri din ce în ce mai mici, ajungând până la situația în care, consumul suplimentar de input *x* să determine pierderi de producție (la dreapta punctului C). În termeni de producție marginală, este echivalent cu a spune că aceasta crește până în punctul A' unde înregistrează valoarea maximă, descrește apoi devenind chiar negativă dincolo de C". Punctul de inflexiune A este locul în care curba producției devine din concavă crescătoare, concavă descrescătoare.

Legea randamentului descrescător al factorilor acționează pentru toate tipurile de funcții de producție, fiind un fenomen cu o semnificație deosebită şi de o mare generalitate.

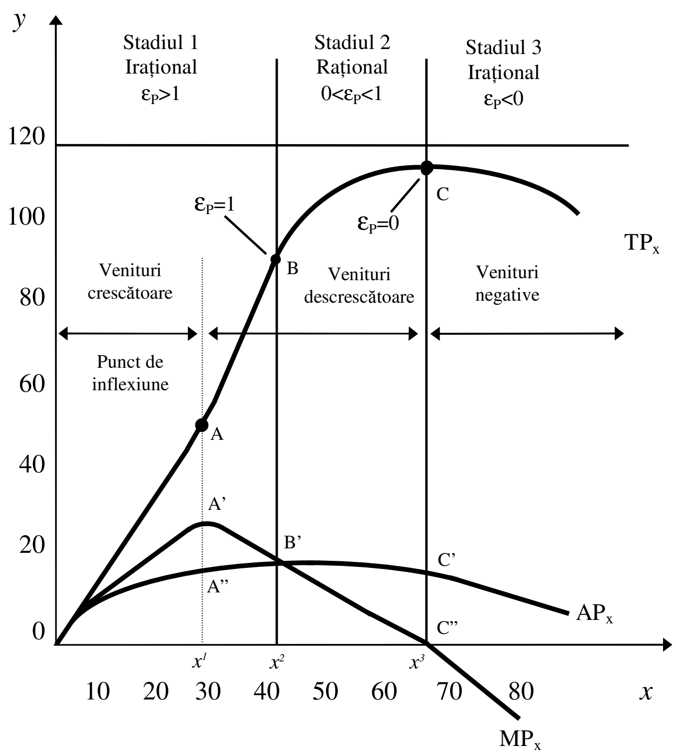


Figura 1.4 Relații de tip funcție de producție. Legea randamentului descrescător al factorilor de producție

Relația producție totală - producție marginală. Figura 1.4 evidențiază următoarele caracteristici pentru relația dintre producția totală şi marginală:

1. Atâta timp cât curba MP_x este crescătoare, curba TP se modifică cu o rată crescătoare, fiind convexă în raport cu axa 0x;

2. Cantitatea de input *x* la care curba TP_x îşi modifică înclinația corespunde punctului în care MP_x înregistrează un maxim (x^1);

3. În punctul în care TP_x își atinge nivelul maxim (x^3), MP_x este zero. Dincolo de acest punct MP_x devine negativ iar TP_x descrește;

4. În concluzie, venituri crescătoare în raport cu factorul input variabil există atunci când MP_x este pozitiv și crescător; venituri descrescătoare apar atunci când MP_x este pozitiv și descrește; venituri negative (pierderi) sunt înregistrate când MP_x este negativ și descrește.

Relația producție medie - producție marginală.

1. Producția medie crește odată cu creșterea consumului de input variabil atâta timp cât producția marginală depășește producția medie;

2. Când producția marginală este mai mică decât cea medie, aceasta descrește cu fiecare unitate de input consumată în plus;

3. Producția marginală și cea medie sunt egale în punctul de maxim al curbei AP_x. Acesta este punctul de eficiență maximă a inputului variabil x, deci x^2 este cantitatea din inputul x ce poate fi utilizată cel mai eficient în combinația cu ceilalți factori de producție menținuți constanți. În adoptarea unei decizii strategice de producție pe termen scurt, managerii trebuie să cunoască acest nivel optimal al inputului variabil x.

Cele trei stadii ale producției. În Figura 1.4 sunt puse în evidență trei stadii ale producției caracterizate prin:

Stadiul 1. În acest stadiu inputurile fixe se găsesc în cantități excesive la nivelul firmei față de inputul variabil. De aceea, orice creștere a consumului de input variabil duce la creșterea cantității de output obținută. De-a lungul acestui stadiu MP_x este mai mare decât AP_x, acesta atingând nivelul maxim la finele stadiului 1.

Stadiul 2. Este cuprins între finele stadiului 1 și punctul în care $MP_x = 0$ și este caracterizat ca fiind rațional din punct de vedere al raportului optimal care există între cantitățile de input variabil și fix utilizate.

Stadiul 3. Inputul variabil excede inputurile fixe, producția marginală este negativă iar cea totală scade. Decizia de a produce în acest stadiu este considerată, de aceea, irațională.

Elasticitatea producției. Notată cu ε_P, elasticitatea producției este definită ca fiind modificarea fracționară în outputul total, $\Delta y / y$, relativă la o modificare fracționară a inputului variabil, $\Delta x / x$. Astfel

$$\varepsilon_P = \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} = \frac{\Delta y / \Delta x}{y / x} \qquad (1.12)$$

și, respectiv,

$$\varepsilon_P = \frac{\partial y / y}{\partial x / x} = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{x}{y} = \frac{\partial y / \partial x}{y / x} \ , \qquad (1.13)$$

pentru cazul continuu.

Deoarece $\Delta y / \Delta x = MP \quad si \quad y / x = AP$, putem rescrie ε_P ca fiind

$$\varepsilon_P = \frac{MP}{AP} \qquad (1.14)$$

Elasticitatea producției este diferită pentru fiecare punct al curbei producției totale şi este utilă în explicarea celor trei stadii ale producției.

În stadiul 1, $\varepsilon_P > 1$ deoarece *MP > AP*, aceasta însemnând că modificarea cu un procent în cantitatea de input variabil *x* utilizată determină o modificare mai mare de un procent a outputului. La începutul stadiului 2, *MP = AP*, şi de aici $\varepsilon_P = 1$, ceea ce înseamnă că modificarea cu 1 % a inputului variabil *x* determină o modificare tot de 1 % a cantității de output obținută. La finele stadiului 2, *MP* = 0, de aici $\varepsilon_P = 0$, însemnând că o modificare a cantității de input *x* consumată nu va produce modificări în outputul obținut.

Regula de decizie pentru funcții de producție cu un singur input variabil. Pentru a determina raportul optim între input şi output astfel încât firma să obțină profit maxim, este nevoie să transferăm analiza din sfera raportului fizic input-output în cea a raportului economic. Cantitatea de input variabil necesară pentru a obține profit maxim va depinde de prețul factorului *x*, de producția marginală a inputului variabil şi de prețul de vânzare al outputului. Pentru a determina cel mai profitabil nivel al producției, trebuie să introducem conceptele şi relațiile dintre venitul marginal, costul marginal şi produsul marginal.

Venitul marginal, MR_y, este venitul suplimentar obținut din vânzarea unei unități de output în plus.

$$MR_y = \frac{\Delta TR}{\Delta y} \qquad sau \qquad MR_y = \frac{\partial TR}{\partial y} \qquad (1.15)$$

Costul marginal, MC_y, este costul adițional datorat producerii unei unități suplimentare de output, şi măsoară rata modificării costului total la modificarea outputului.

$$MC_y = \frac{\Delta TC}{\Delta y} \quad sau \quad MC_y = \frac{\partial TC}{\partial y} \tag{1.16}$$

Produsul marginal, MP_x, reprezintă cantitatea de output obținută ca urmare a consumării unei unități suplimentare de input x

$$MP_x = \frac{\Delta TP}{\Delta x} \quad sau \quad MP_x = \frac{\partial TP}{\partial x} \tag{1.17}$$

Firma maximizatoare de profit, va decide să utilizeze cantități din fiecare input variabil până la punctul în care venitul generat de o unitate în plus din fiecare input variabil este egal cu costul unitar al inputului. Acest lucru rezultă din faptul că firma obține maximum de profit pentru acel nivel al producției pentru care venitul marginal și costul marginal sunt egale. De aici:

$$MC_y = \frac{\Delta TC}{\Delta y} = \frac{P_x \cdot \Delta x}{\Delta y} = P_x(\frac{\Delta x}{\Delta y}) = \frac{P_x}{\Delta y / \Delta x} = \frac{P_x}{MP_x} = MR_y \tag{1.18}$$

unde P_x reprezintă prețul pe piață al unei unități de input x.

Prin urmare, utilizând funcțiile de producție, firma poate decide care este cantitatea optimă de produs pe care urmează să o realizeze (acel volum y pentru care $MC_y = MR_y$), precum și ce volum al inputului variabil să utilizeze în mod optimal.

2. Funcții de producție cu inputuri variabile multiple

Forma generală a unei funcții de producție cu mai multe inputuri variabile este

$$y = f(x) = f(K, L) \tag{1.19}$$

unde y reprezintă cantitatea de output obținută de către firmă utilizând inputurile variabile $x_1, x_2, ..., x_K$, cu $x_i \geq 0, i = \overline{1,K}$, grupate în cele două grupe principale, capital (K) și muncă (L). Vom extinde analiza la cazul funcțiilor de producție multi-output, situație în care y este un vector al outputurilor firmei.

Indiferent de tipul funcţiei de producţie cu ajutorul căreia firma îşi modelează posibilităţile tehnologice, principalele proprietăţi ale funcţiilor de producţie sunt:

1. Producţia nu este posibilă în absenţa resurselor, adică:

$$f(0, x_2, \ldots, x_K) = 0$$
$$f(x_1, 0, \ldots, x_K) = 0$$
$$\vdots$$
$$f(x_1, x_2, \ldots, 0) = 0$$

Această proprietate indică faptul că toate inputurile sunt necesare, absenţa unuia dintre ele neputând fi compensată prin utilizarea altor inputuri. În realitate, această proprietate este valabilă doar pentru unele dintre resurse, cum ar fi de exemplu forţa de muncă.

2. Creşterea cantităţilor de input consumate până la un anumit nivel, nu conduce la reducerea cantităţii de output obţinut, adică funcţia de producţie este nedescrescătoare în raport cu inputurile sale. Prin urmare, dacă $x^1 \leq x^2 \Rightarrow f(x^1) \leq f(x^2)$.

În cazul în care *f(x)* este continuă şi derivabilă, această proprietate se mai poate scrie

$$e_i = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \geq 0 \quad , \quad i = \overline{1,K} \tag{1.20}$$

unde e_i poartă numele de *eficienţă diferenţială a inputului* x_i şi exprimă cu câte unităţi creşte outputul la o creştere cu o unitate a inputului *i*.

3. Crescând peste un anumit nivel cantitatea consumată dintr-un anumit input, în condiţiile menţinerii constante a cantităţilor consumate din celelalte inputuri, eficienţa diferenţială a utilizării acestui input nu creşte. Spunem că funcţia de producţie este supusă acţiunii legii randamentului descrescător al factorilor, lege prezentată anterior. Formal scriem:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right)}{\partial x_i} \leq 0 \quad , \quad i = \overline{1,K} \tag{1.21}$$

Această proprietate este echivalentă cu faptul că *f(x)* este o funcţie *cvasi-concavă* în raport cu fiecare din argumentele sale, adică pentru orice doi vectori input x^1 şi x^2 şi un coeficient $\alpha \in [0,1]$, avem:

$$f[\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2] \geq \alpha f(x^1) + (1-\alpha) f(x^2) \qquad (1.22)$$

În cazul în care $f(x)$ este de două ori derivabilă în raport cu fiecare input, condiția de cvasi-concavitate este aceea ca matricea Hessian asociată să fie seminegativ definită, adică

$$H = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=\overline{1,K}} \leq 0 \qquad (1.23)$$

4. Funcția de producție păstrează neschimbată unitatea de măsură atunci când scala producției se modifică. Această proprietate este cunoscută sub numele de *economie de scală*. Din punct de vedere matematic, aceasta înseamnă că $f(x)$ este omogenă de gradul δ, deci

$$f(\lambda x) = \lambda^\delta f(x) \qquad (1.24)$$

Coeficientul δ caracterizează funcția de producție astfel:

- dacă $\delta > 1$, funcția de producție se caracterizează prin economie de scală crescătoare;
- dacă $\delta = 1$, funcția de producție se caracterizează prin economie de scală constantă;
- dacă $\delta < 1$, funcția de producție se caracterizează prin economie de scală descrescătoare.

Aceste cazuri sunt ilustrate în Figura 1.5.

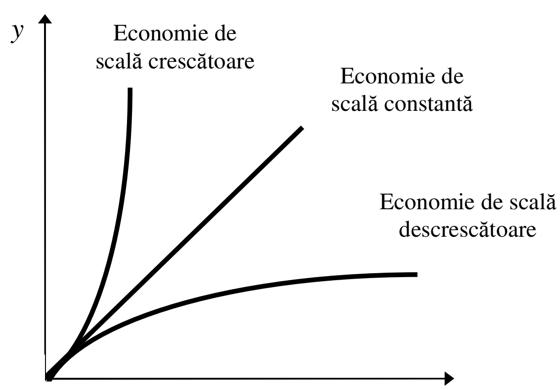


Figura 1.5 Tipuri posibile de economii de scală

Pentru a măsura consecințele modificării de scală a producției firmei, utilizăm elasticitatea producției, definită în acest caz prin:

$$\varepsilon_x = \lim_{\lambda \to 1} \frac{\partial f(\lambda x)}{\partial \lambda} \cdot \frac{f(\lambda x)}{\lambda} \tag{1.25}$$

Elasticitatea ε_x exprimă procentual modificarea rezultatelor producției firmei la modificarea cu 1 % a scalei producției, pentru o structură a inputului x dată.

Am tratat, mai sus, ceva mai detaliat funcțiile de producție, deoarece ele modelează posibilitățile tehnologice ale firmei, constituindu-se drept restricție în modelul cu ajutorul căreia firma determină decizia optimală, de producție. Încheiem cu precizarea că în teoria microeconomică sunt cunoscute şi studiate în profunzime mai multe tipuri de funcții de prooducție ale firmei precum:

- funcții de producție cu factori substituibili;
- funcții de producție de tip putere (Cobb-Douglas);
- funcții de producție de tip C.E.S.;
- funcții de producție de tip V.E.S.;
- funcții de producție cu proporții constante.

Estimarea funcțiilor de producție şi alegerea tipului de funcție adecvată particularităților firmei depăşeşte cadrul prezentei lucrări (pentru detaliere vezi [35], [37]). Cu intenția de a insista asupra modului în care decidentul utilizează funcția de producție pentru a determina nivelul outputului ce îi aduce profitul maxim, vom analiza în continuare aspectele privind construirea şi rezolvarea *modelului firmei*.

1.3.3 Funcția de profit şi modelul firmei

Având descrise posibilitățile tehnologice printr-o funcție de producție, decidentul trebuie să determine planul de producție Z (compus din cantitățile care urmează a fi fabricate din fiecare tip de produs în parte) pe care îl va realiza firma astfel încât să obțină un profit maxim. Pentru a formaliza acest obiectiv, vom introduce o funcție

$$\pi: \mathcal{A} \to R \ ,$$

unde $\pi(Z)$ reprezintă profitul obținut de către firmă în urma realizării programului de producție Z, $\mathcal{A}$ fiind mulțimea tehnologică a firmei.

Să explicităm, în continuare, forma analitică a acestei funcții [37]. Dacă prețurile celor N bunuri de pe piață sunt date de vectorul $P = (p_1, p_2, \dots ,p_N)$, atunci profitul firmei asociat vectorului netputurilor Z este:

$$\pi(Z) = \sum_{n=1}^{N} p_n z_n = P \cdot Z \ . \qquad (1.26)$$

Această formă de scriere a profitului are la bază ipoteza implicită că firma, prin alegerile sale între diferite planuri de producție Z, nu modifică prețurile pe piață. Totuşi, pentru unele firme mari, această ipoteză nu este adevărată. De aceea, în cazul în care prețurile sunt afectate de schimbarea nivelului producției, vom nota cu $p_n(z)$ prețul produsului n, iar profitul firmei va fi

$$\pi(Z) = \sum_{n=1}^{N} p_n(z) \cdot z_n = P(z_n) \cdot Z \qquad (1.27)$$

Când nivelul activității firmei nu are efect asupra prețului produsului k, vom spune că firma este dependentă de prețul acelui produs, sau că firma este *competitivă pe piața produsului k* (firma este "price takers"). Când o firmă este dependentă de preț pe toate piețele, deci dacă profitul se scrie simplu ca $P{\cdot}Z$, atunci vom spune că firma este *competitivă*.

1. Problema firmei

Cu elementele introduse anterior, firma are de rezolvat problema maximizării profitului $P(z){\cdot}Z$, în condițiile în care $Z \in \mathcal{A}$.

Considerând cazul în care firma este competitivă, profitul se va scrie simplu ca $P{\cdot}Z$, iar problemei firmei i se poate da interpretarea geometrică din Figura 1.6. În această figură, este reprezentată problema firmei cu un singur input, respectiv un singur output.

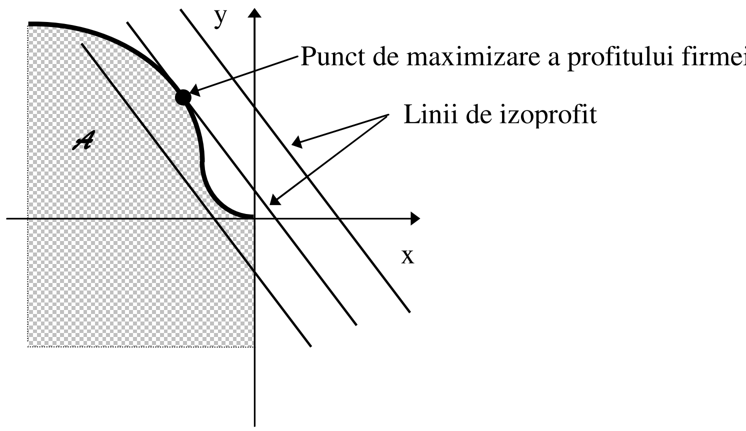


Figura 1.6

În cazul în care firma nu este dependentă de preţ, acesta depinde de planul de producție *Z* pe care firma decide să îl realizeze. Liniile de izoprofit din Figura 1.6, devin curbe de izoprofit, deci curbe de-a lungul cărora $P(z)\cdot Z$ este constant. Această situație este ilustrată în Figura 1.7, din care se observă şi convexitatea curbelor de izoprofit. În acest caz, atât mulțimea admisibilă cât şi curbele de izoprofit au expresii matematice mai complicate față de cazul anterior. Cu toate acestea, cu cât ipotezele în care se efectuează analiza le apropie mai mult de condițiile reale de pe piață, cu atât ele devin mai asemănătoare.

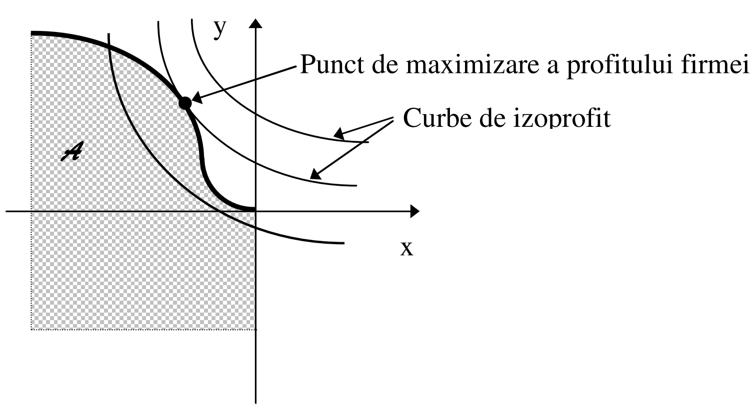


Figura 1.7

2. Modelul firmei

Să formalizăm problema firmei considerând mai întâi cazul unei firme cu un singur output şi ale cărei tehnologii sunt descrise de o funcție de producție $f(x)$ cu $x = (x_1, x_2,.., x_K) \geq 0$. Având deci funcția de producție şi presupunând că firma este competitivă atât pe piața factorilor de producție, cât şi pe piața produsului (outputului), putem scrie modelul firmei astfel:

$$\max_{x=(x_1,\dots,x_K)\geq 0} [\, p \cdot f(x) - \sum_{i=1}^{K} w_i x_i \,] \tag{1.28}$$

unde: p este prețul outputului;

w_i este prețul inputului i.

Presupunând că $f(x)$ este derivabilă şi că soluția se află într-un punct interior al mulțimii $\mathcal{A}$, condiția de optimalitate de ordinul întâi pentru factorul de producție i este

$$p\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right) = w_i \tag{1.29}$$

şi ea arată faptul că, în punctul de optim, valoarea produsului marginal al factorului i egalează prețul acestui factor.

Să presupunem, în continuare, că firma este competitivă pe piața factorilor de producție, dar nu este competitivă pe piața produselor. Prețul outputului va depinde atunci de nivelul producției realizate, adică $p = p(f(x))$. În acest caz, modelul firmei este

$$\max_{x=(x_1,\dots,x_K)\geq 0} [\, p(f(x)) \cdot f(x) - \sum_{i=1}^{K} w_i x_i \,], \tag{1.30}$$

iar condiția de ordinul întâi devine

$$[\, p'(f(x)) \cdot f(x) + p(f(x))]\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right) = w_i, \qquad i = 1,\dots,K \tag{1.31}$$

Condiția (1.31) afirmă faptul că, în punctul de optim, prețul fiecărui factor de producție va fi egal cu venitul marginal al factorului respectiv.

Presupunând, în continuare, că prețul factorului *i* depinde doar de cantitatea din acest factor utilizată de către firmă, caz în care vom scrie $w_i(x_i)$, modelul firmei devine

$$\max_{x=(x_1,\ldots,x_k)\geq 0} [\, p(f(x))\cdot f(x) - \sum_{i=1}^{K} w_i(x_i)\cdot x_i \,], \tag{1.32}$$

iar condiția de ordinul întâi pentru factorul *i* este

$$[\, p'(f(x))\cdot f(x) + p(f(x))] \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right) = w'(x_i)\cdot x_i + w_i(x_i), \qquad i = 1,\ldots,K. \tag{1.33}$$

Din această condiție rezulă că, în punctul de optim, venitul marginal al fiecărui factor trebuie să fie egal cu costul său marginal. Prin urmare, firma va trebui ia decizia de a realiza programul de producție Z^* pentru care condiția (1.33) este verificată pentru toate inputurile x_i, $i=1,\ldots,K$.

3. Soluția modelului firmei și proprietățile acesteia

Să presupunem că avem o firmă competitivă descrisă de mulțimea sa tehnologică $\mathcal{A}$. Pentru vectorul dat al prețurilor, P, care prin ipoteză nu depinde de vectorul programului de producție Z ales de către ea, firma va trebui să determine pe Z pentru a rezolva problema

$$\max_{Z\in \mathrm{A}} (P\cdot Z)\ . \tag{1.34}$$

Dacă această problemă are soluție pentru prețurile date, P, vom nota cu $\pi(P)$ valoarea funcției obiectiv corespunzătoare soluției, şi o vom numi *funcția de profit a firmei*, ea exprimând profitul maxim al firmei în funcție de vectorul prețurilor, P. Proprietățile funcției de profit a firmei sunt date de următoarea propoziție:

Propoziția 1.1:

a. Funcția de profit $\pi(P)$ este *omogenă de gradul întâi* în raport cu prețurile;

b. Funcția de profit $\pi(P)$ este *continuă* şi *convexă* în raport cu vectorul prețurilor P.

Relativ la soluțiile modelului firmei, avem următoarea propoziție:

Propoziția 1.2:

a. Dacă Z^* este o soluție a modelului firmei pentru vectorul prețurilor P, atunci pentru un scalar $\lambda>0$, Z^* este soluție a modelului firmei pentru vectorul prețurilor $\lambda \cdot P$;

b. Dacă mulțimea $\mathcal{A}$ este convexă, mulțimea soluțiilor modelului firmei pentru vectorul prețurilor P este convexă pentru fiecare preț.

Legătura dintre funcția de profit şi soluția modelului firmei ne-o oferă următoarea propoziție:

Propoziția 1.3 (lema lui Hotelling):

Presupunând că funcția de profit $\pi(P)$ este continuă şi derivabilă pentru vectorul prețurilor P^* şi că Z^* este o soluție a modelului firmei în raport cu prețurile P^*, atunci:

$$\left.\frac{\partial \pi(p)}{\partial p_n}\right|_{p^*} = z_n^* \quad , \quad n = 1,\dots,N . \tag{1.35}$$

Condițiile de optimalitate de ordinul doi ale modelului firmei sunt date de:

Propoziția 1.4:

Presupunem că funcția de profit a firmei $\pi(P)$ este derivabilă în raport cu prețurile P^* şi că pentru toate punctele P dintr-o vecinătate a lui P^*, modelul firmei are o soluție unică $Z^*(P)$ care, de asemenea, este continuă şi derivabilă în P. Atunci matricea de ordin NxN al cărei element (j,n) este $\frac{\partial z_j^*}{\partial p_n}$ este simetrică şi pozitiv semidefinită. În particular avem:

a. $$\frac{\partial z_j^*}{\partial p_n} = \frac{\partial z_n^*}{\partial p_j} \quad , \quad (\forall)\, j,n \tag{1.36}$$

b. $$\frac{\partial z_n^*}{\partial p_n} \geq 0 \quad , \quad (\forall)\, n . \tag{1.37}$$

1.3.4 Funcția de cost şi modelul dual al firmei

În cazul în care, din diferite motive, posibilitățile tehnologice restricționează firma să producă un anumit nivel, *y,* al outputului, managerul care adoptă decizia de producție îşi va fixa drept obiectiv minimizarea costurilor de producție pentru realizarea acestui output.

Vom reveni la firma care dispune de *K* inputuri notate $x = (x_1, x_2, ..., x_K)$ şi *M* outputuri, notate $y=(y_1, y_2, ..., y_M)$. Reamintim faptul că am notat cu *V(y)* mulțimea inputurilor necesare pentru a obține outputuri la nivelul dat prin vectorul *y*. Vom presupune faptul că firma este competitivă pe piața factorilor şi vom nota cu $w = (w_1, \ldots, w_K) \in R^K$ 1 vectorul prețurilor inputurilor. Cu aceste elemente, modelul firmei se formulează astfel:

$$\min_{x \in V(y)} w \cdot x \tag{1.38}$$

şi el constituie, de fapt, dualul modelului prin care firma îşi propune maximizarea funcției profit (vezi relația 1.28).

Observăm că acest model depinde de parametrii *w* şi *y,* şi notăm în acest context cu *c(w,y)* valoarea funcției obiectiv care nu este altceva decât funcția de cost a firmei.

În cazul a două inputuri, modelul dual al firmei poate fi reprezentat ca în Figura 1.8.

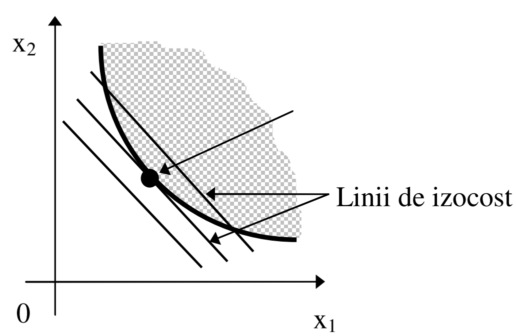


Figura 1.8

Proprietățile funcției de cost sunt următoarele:

Propoziția 1.5:

a. Funcția de cost *c(w,y)* este ***omogenă de gradul întâi*** în *w* pentru fiecare vector de outputuri, *y*, fixat;

b. *c(w, y)* este ***nedescrescătoare*** de *w* pentru fiecare *y* fixat;

Definiția 1.1: Soluțiile modelului dual al firmei pentru w şi y date, sunt numite ***cereri condiționate de factori***, condiționarea referindu-se la faptul că vectorul output este fixat.

Proprietățile acestor soluții sunt date de:

Propoziția 1.6:

a. Dacă x este o soluție a modelului dual al firmei pentru vectorii w şi y, atunci ea este o soluție a acestui model şi pentru vectorii $\lambda \cdot w$ şi y, unde $\lambda > 0$ este un scalar.

b. Dacă mulțimea $V(y)$ este convexă, atunci şi mulțimea soluțiilor modelului dual al firmei este convexă.

Legătura dintre funcția de cost $c(w, y)$ şi soluțiile modelului dual al firmei este dată de următoarea propoziție.

Propoziția 1.7 (lema lui Shephard):

Presupunem că funcția de cost $c(w, y)$ este continuă şi derivabilă în w, pentru y fixat. Fie x^* o soluție a modelului dual al firmei în raport cu w^* şi y. Atunci

$$\left.\frac{\partial c(w, y)}{\partial w_i}\right|_{(w^*, y)} = x_i^* \quad , \quad i = 1, \ldots, K . \tag{1.39}$$

Corelând această propoziție cu lema lui Hotelling, ea indică faptul că, în condițiile în care $c(w, y)$ este continuă şi derivabilă de w în w^*, modelul dual al firmei scris pentru w^* şi y are în mod necesar o soluție unică. Această soluție oferă firmei combinația de inputuri necesare pentru realizarea nivelului y al producției cu un cost de fabricație minim.

Pentru a ilustra modalitatea în care decidentul utilizează soluția modelului dual al firmei în decizia de producție, vom presupune în continuare că firma doreşte să minimizeze costurile implicate de realizarea unui nivel dat y_0 al producției, pentru care utilizează două inputuri, capital şi muncă, notate generic K şi L (vezi 1.19).

Funcția de cost a firmei este de forma:

$$C(K,L) = P_K \cdot K + P_L \cdot L \tag{1.40}$$

iar nivelul producției stabilit a se realiza este y_0, posibilitățile tehnologice ale firmei fiind descrise de funcția de producție

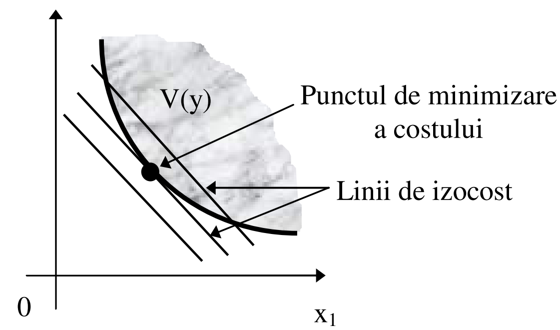


Figura 1.8

$$y = f(K,L). \tag{1.41}$$

Firma urmează să aleagă cantităţile de resurse K şi L care îi permit să obţină nivelul y_0 stabilit al outputului cu un cost cât mai mic posibil, în condiţiile tehnologice de care dispune. În Figura 1.9 este reprezentată izocuanta corespunzătoare nivelului y_0 al outputului şi mai multe drepte de izocost posibile C_1, C_2, C_3. Izocosturile au aceeaşi pantă dar corespund unor costuri de producţie diferite, $C_1 < C_2 < C_3$.

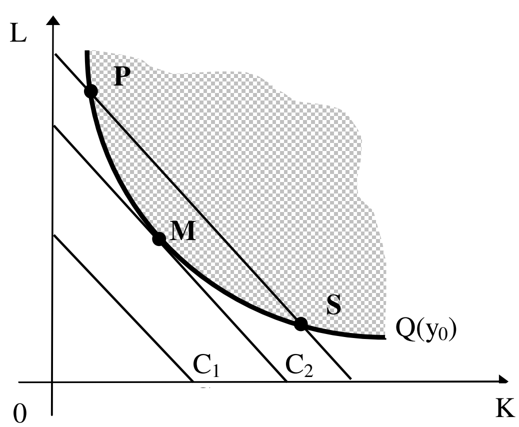


Figura 1.9 Combinaţia de factori necesară obţinerii nivelului y_0 al outputului la un cost minim

Ecuaţia dreptelor de izocost este:

$$L = -\frac{P_K}{P_L} \cdot K + \frac{C_i(K,L)}{P_L}, \quad i = 1,2,3. \tag{1.42}$$

Nivelul C_1 al costului, deşi este cel mai redus, nu poate fi luat în considerare, deoarece la acest cost firma nu poate realiza nivelul y_0 al outputului. Acest nivel al producției se poate realiza, de exemplu, cu combinații de resurse cum sunt cele corespunzătoare punctelor P şi S în care izocostul C_3 intersectează izocuanta $Q(y_0)$, dar în aceste puncte firma consumă resurse în exces, deoarece deplasându-se de la P sau S către M, observăm că firma poate realiza aceeaşi producție cu un cost mai redus. Prin urmare, punctului M îi corespunde producția optimală, în acest punct izocuanta fiind tangentă la o dreaptă a izocostului. Combinația optimală cost-output corespunde deci punctului în care panta dreptei de izocost C_2 egalează panta curbei $Q(y_0)$. Acest punct este soluția modelului formulat analitic astfel:

$$\begin{cases} (\min)C(K,L) = \min(P_K \cdot K + P_L \cdot L) \\ y_0 = f(K,L) \\ K, L \geq 0 \end{cases} \quad . \tag{1.43}$$

Construind lagrangeanul asociat modelului (1.43)

$$\mathcal{L} = P_K \cdot K + P_L \cdot L + \lambda[y_0 - f(K,L)] \tag{1.44}$$

obținem condițiile necesare de optim

$$\begin{cases} P_K - \lambda \dfrac{\partial f(K,L)}{\partial K} = 0 \\ P_L - \lambda \dfrac{\partial f(K,L)}{\partial L} = 0 \\ y_0 - f(K,L) = 0 \end{cases} \quad , \tag{1.45}$$

din care rezultă

$$\frac{\partial f / \partial K}{P_K} = \frac{\partial f / \partial L}{P_L} = \frac{1}{\lambda} \quad . \tag{1.46}$$

În acest caz multiplicatorul Lagrange λ măsoară costul suplimentar atras de producerea unei unități suplimentare de output, în condițiile realizării producției optimale. Prin urmare, pentru a realiza în condiții de optimalitate nivelul y_0 al producției, decidentul trebuie să aleagă combinația de input (K^*, L^*) obținută ca soluție a modelului (1.43).

1.3.5 Optimizarea deciziei privind maximizarea outputului firmei

Utilizând modelul firmei, decidentul poate determina nivelul optim al outputului pe care urmează să îl realizeze în condiţiile în care resursele sale sunt limitate.

Vom considera o firmă care utilizează două inputuri x_1 şi x_2 şi a cărei tehnologie de fabricaţie este descrisă de o funcţie de producţie $y = f(x_1, x_2)$. Costul total al producţiei va fi în acest caz

$$C_T(y) = p_1 x_1 + p_2 x_2 \quad , \qquad (1.47)$$

unde p_1 şi p_2 sunt preţurile la care firma achiziţionează cei doi factori de producţie x_1 şi x_2.

Presupunem că firma dispune de resurse financiare în valoare totală de R u.m, pe care le va investi în procurarea de inputuri x_1 şi x_2. În acest caz, evident că ea va trebui să respecte restricţia:

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq R \, , \qquad (1.48)$$

sau, dacă exprimăm cantitatea din inputul x_2 care urmează a fi achiziţionată

$$x_2 \leq -\frac{p_1}{p_2} x_1 + \frac{R}{p_2} . \qquad (1.49)$$

Punctele de intersecţie ale acestei drepte cu axele de coordonate sunt R/p_1, respectiv R/p_2. Prin construcţie, toate punctele aflate pe această dreaptă corespund aceluiaşi consum de resurse R, dar repartizat diferit între factorii x_1 şi x_2. Această dreaptă se numeşte, de aceea, ***dreaptă de izocost*** (vezi Figura 1.10).

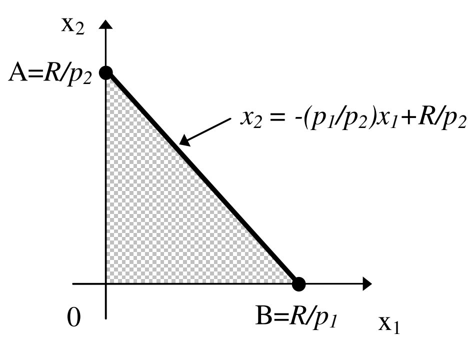


Figura 1.10

Cunoaşterea izocostului permite definirea combinațiilor tehnologic posibile de resurse pe care firma are posibilitatea de a le achiziționa în condițiile în care nu îşi depăşeşte disponibilul de resurse. Domeniul deciziilor sale admisibile în ce priveşte consumul de factori este dat de zona haşurată din Figura 1.10.

Maximizarea producției firmei

Să considerăm că firma doreşte să realizeze un output cât mai mare, în condițiile în care dispune de resurse financiare limitate la volumul R. În Figura 1.11 sunt reprezentate izocuantele corespunzătoare unor nivele diferite de producție, precum şi dreapta de izocost obținută cunoscând prețurile inputurilor şi cantitatea de resursă financiară, *R*, disponibilă.

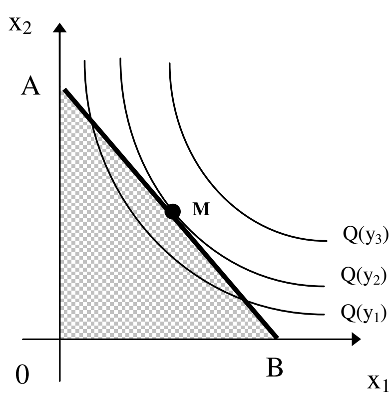


Figura 1.11

Domeniul soluțiilor admisibile este dat de suprafața 0AB, inclusiv frontierele. Plecând, să spunem, din punctul A, este clar că putem considera nivelurile producției y_1, corespunzător intersecției izocuantei $Q(y_1)$ cu dreapta AB, sau y_2, aflat la intersecția izocuantei $Q(y_2)$ cu izocostul AB, şi aşa mai departe. Se observă însă că $y_2>y_1$, deci deplasarea de-a lungul lui AB se traduce printr-o creştere a producției. Nivelul maxim al producției, care există în mod necesar datorită existenței unei infinități continue de izocuante, se atinge în punctul M, în care izocostul este tangent la una dintre izocuante, şi anume la $Q(y_2)$. Poziția punctului M în plan corespunde combinației optime de resurse utilizate pentru a obține producția maximă. Condiția de tangență dintre dreapta izocostului şi izocuantă este egalitatea dintre rata de substituire a factorilor, γ, în punctul respectiv şi panta dreptei izocostului. Deoarece $\gamma = -\dfrac{\partial f / \partial x_1}{\partial f / \partial x_2}$, această condiție se scrie

$$-\frac{\partial f\ /\ \partial x_1}{\partial f\ /\ \partial x_2} = -\frac{p_1}{p_2}, \tag{1.50}$$

sau, echivalent

$$\frac{\partial f\ /\ \partial x_1}{p_1} = \frac{\partial f\ /\ \partial x_2}{p_2}. \tag{1.50'}$$

Condiția (1.34) spune faptul că, în punctul de optim, există egalitatea între eficiența diferențială a fiecărui factor, $\partial f\ /\ \partial x_i \quad , \quad i = 1,2$, raportată la prețul factorului respectiv.

Analitic, aceeaşi condiție o obținem dacă formulăm următoarea problemă de optimizare:

$$\begin{cases} (max)y = (max)f(x_1, x_2) \\ \qquad in\ conditiile \\ \quad p_1x_1 + p_2x_2 = R \\ p_1, p_2 > 0 \quad , x_1, x_2 > 0 \end{cases}. \tag{1.51}$$

Lagrangeanul acestei probleme este:

$$\mathcal{L} = f(x_1,\ x_2)+\lambda(R\text{-}p_1x_1\text{-}p_2x_2), \tag{1.52}$$

iar condițiile de optimalitate de ordinul întâi sunt:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0. \tag{1.53}$$

Aceste condiții conduc la relațiile

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda p_1 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda p_2 = 0 \\ R - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \end{cases}. \tag{1.54}$$

Din primele două ecuații deducem că

$$\frac{\partial f / \partial x_1}{p_1} = \frac{\partial f / \partial x_2}{p_2} = \lambda, \tag{1.55}$$

deci optimul este caracterizat de egalitatea dintre rapoartele eficiențelor diferențiale şi prețurile resurselor. Multiplicatorul Lagrange, λ, măsoară în cazul acestei probleme producția suplimentară posibilă în condițiile creşterii resursei disponibile pentru consum cu o unitate.

1.4 Studii de caz, teme de casă

1-1. Potrivit nomenclatorului său de fabricație o firmă poate produce cinci tipuri de produse P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 utilizând trei categorii de materii prime M_1, M_2, M_3. Consumurile specifice din materiile prime pentru realizarea produselor, profiturile unitare precum şi disponibilul din fiecare materie primă de-a lungul perioadei analizate sunt date în tabelul 1.1.

Tabelul 1.1

Produs / Materia primă	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	Disponibil
M_1	0	1,2	1	1	0.5	1000
M_2	0	1	0,5	1	1	500
M_3	1	1,3	0	2	1,5	800
Profit unitar [u.m./buc.]	50	300	30	60	40	

Ştiind că firma dispune de capacitate de producție pentru orice cantitate de produs ce urmează a fi fabricată şi că toate produsele firmei vor putea fi desfăcute pe piață, să se scrie un model liniar pentru determinarea cantităților optime ce urmează a fi fabricate de către firmă din cele cinci produse, astfel încât profitul total obținut din vânzarea acestora să fie maxim.

Soluție

Notăm cu x_j , $j = 1,...,5$ cantitatea ce urmează a fi produsă din bunul P_j. Modelul matematic al problemei va conține:

- restricții privind încadrarea în disponibilul limitat de materii prime:

$$\begin{array}{l} 1,2x_2 + x_3 + x_4 + 0,5x_5 \leq 1000 \\ x_2 + 0,5x_3 + x_4 + x_5 \leq 500 \\ x_1 + 1,3x_2 + 2x_4 + 1,5x_5 \leq 800 \end{array}$$

- restricții de nenegativitate impuse variabilelor modelului prin conținutul lor economic:

$$x_j \geq 0 , j = 1,...,5$$

- funcția obiectiv de optimizat:

$$[max]f = 50x_1 + 300x_2 + 30x_3 + 60x_4 + 40x_5$$

1-2. O firmă produce trei mărfuri *A, B, C* care, în cursul procesului tehnologic, parcurg patru secții diferite. Timpul de prelucrare al fiecărui produs în fiecare secție, timpul disponibil al fiecărei secții, cererea minimă și maximă din fiecare produs, precum și profitul unitar sunt redate în tabelul 1.2:

Tabelul 1.2

Produs	Cerere		Timp de prelucrare pe unitatea de produs				Profit unitar [u.m./buc.]
	Minimă	Maximă	Secția 1	Secția 2	Secția 3	Secția 4	
A	20	200	0,10	0,06	0,18	0,13	10
B	0	100	0,12	0,05	0	0,10	12
C	70	180	0,15	0,09	0,07	0,08	15
Timp total disponibil			36	30	37	38	-

Scrieți un program liniar în vederea determinării cantităților ce trebuie realizate din fiecare produs astfel încât să se asigure satisfacerea cererii cu obținerea unui profit total maxim.

Soluție

Dacă notăm cu b_i timpul disponibil al secției i , $i = 1,...,4$, cu a_{ij} timpul consumat în secția i de o unitate din produsul j , $j = 1, 2, 3$, cu x_j cantitatea din produsul j ce va fi fabricată şi cu l_j respectiv L_j limita inferioară respectiv superioară a cererii pentru produsul j, modelul liniar va conține:

- restricții de încadrare în fondul de timp disponibil:

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_{ij} \le b_i \quad , \quad i = 1,...,4 \iff \quad \begin{array}{l} 0{,}10x_1 + 0{,}12x_2 + 0{,}15x_3 \le 36 \\ 0{,}06x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}09x_3 \le 30 \\ 0{,}18x_1 \qquad\quad + 0{,}07x_3 \le 37 \\ 0{,}13x_1 + 0{,}10x_2 + 0{,}08x_3 \le 38 \end{array}$$

- restricții de încadrare în limitele cererii:

Comment [PV1]: Page: 2

$$l_j \le x_j \le L_j \quad , \quad j = 1, 2, 3 \quad \iff \quad \begin{array}{l} 20 \le x_1 \le 200 \\ 0 \le x_2 \le 100 \\ 70 \le x_3 \le 180 \end{array}$$

Se observă că aceste restricții presupun şi restricțiile de nenegativitate asupra variabilelor x_j.

- funcția obiectiv a modelului:

$$(max)f = 10x_1 + 12x_2 + 15x_3 .$$

Efectuând transformarea $y_j = x_j - l_j$ obținem următorul model al unei probleme de programare liniară cu variabile mărginite:

$$\begin{array}{l} 0{,}10y_1 + 0{,}12y_2 + 0{,}15y_3 \le 23{,}5 \\ 0{,}06y_1 + 0{,}05y_2 + 0{,}09y_3 \le 22{,}5 \\ 0{,}18y_1 \qquad\quad + 0{,}07y_3 \le 28{,}5 \\ 0{,}13y_1 + 0{,}10y_2 + 0{,}08y_3 \le 29{,}8 \\ \quad y_1 \le 180 \\ \quad y_2 \le 100 \\ \quad y_3 \le 110 \\ \quad y_j \ge 0 \;,\; j = 1,2,3 \\ (max)f = 10y_1 + 12y_2 + 15y_3 \end{array}$$

1-3. Stația pilot a unei rafinării are la dispoziție trei sortimente de benzine S_1, S_2, S_3 în cantitățile 100t din S_1, 90t din S_2 şi S_3 în cantitate practic nelimitată şi doreşte realizarea unui amestec având următoarele caracteristici:

a) Cantitatea de benzină S_1 trebuie să fie cuprinsă între 25% si 30% din întregul amestec;

b) Cantitatea de benzină S_2 trebuie să reprezinte cel puțin 50% din întregul amestec.

Prețurile unitare ale celor trei sortimente sunt de 14, 15 respectiv 13 mil. lei pe tonă. Să se scrie un model liniar a cărui rezolvare să indice cantitățile ce urmează a se amesteca din fiecare tip de benzină astfel încât să fi respectată structura amestecului iar valoarea acestuia să fie maximă.

Soluție

Vom nota cu x_j, $j = 1, 2, 3$ cantitatea de benzină de tip S_j ce urmează a face parte din amestec. Modelul va conține restricții de încadrare în cantitatea disponibilă de benzină:

$x_1 \leq 100$

$x_2 \leq 90$,

restricții privind structura amestecului:

$$25/100(x_1 + x_2 + x_3) \leq x1 \leq 30/100(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$x_2 \geq 50/100(x_1 + x_2 + x_3),$$

restricții de nenegativitate a variabilelor:

$x_j \geq 0$, $j = 1, 2, 3$,

şi funcția obiectiv:

$(max)f = 14x_1 + 15x_2 + 13x_3$ [mil. lei]

Printr-o serie de transformări simple putem aduce modelul la forma:

$$\begin{aligned}
&x_1 \leq 100\\
&x_2 \leq 90\\
&-3x_1 + x_2 + x_3 \leq 0\\
&7x_1 - 3x_2 - 3x_3 \leq 0\\
&x_1 - x_2 + x_3 \leq 0\\
&x_j \geq 0 \text{ , } j = 1, 2, 3\\
&(max)f = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3
\end{aligned}$$

1-4. O rafinărie trebuie să producă trei sortimente de benzină B_1, B_2, B_3 prin amestecul a patru derivați D_1, D_2, D_3, D_4. Pentru asigurarea calității benzinelor, procentul derivaților în amestec trebuie să respecte limitele din tabelul 1.3, în care mai sunt conținute prețurile de livrare ale celor trei sortimente de benzină, costurile derivaților şi capacitățile maxime disponibile lunar pentru producerea acestora.

Să se scrie un model liniar în vederea determinării structurii fiecărui tip de benzină şi a cantității care urmează a fi produsă lunar astfel încât profitul obținut să fie maxim.

Tabelul 1.3

Benzina / Derivați	B_1	B_2	B_3	Cantitatea disponibilă [mii litri]	Cost de producție [u.m./l]
D_1	max. 30%	max. 50%	max. 70%	30	1,50
D_2	max. 40%	min. 10%		20	3
D_3	max. 50%			40	2
D_4				10	2,50
Preț unitar de livrare [u.m./l]	2,75	2,25	1,75		

Soluție

În vederea modelării acestei probleme vom nota cu:

x_{ij} - cantitatea din D_i folosită la producerea benzinei B_j, $i = 1,\dots,4$, $j = 1, 2, 3$;

b_i - disponibilul din derivatul D_i, $i = 1,\dots,4$;

p_{ij} - proporția limită a derivatului D_i în benzina B_j ;

c_j - prețul de livrare al benzinei B_j ;

k_i - costul de producție al derivatului D_i .

Restricțiile modelului vor fi:

- restricții de încadrare în disponibilul limitat de derivați:

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} \le b_i \qquad , i = 1,\dots,4 ;$$

- restricții privind respectarea proporțiilor admise în amestec:

$$\frac{x_{ij}}{\sum_{i=1}^{4} x_{ij}} \begin{bmatrix} \le \\ \ge \end{bmatrix} p_{ij} \qquad , \quad j = 1, 2, 3;$$

- condițiile de nenegativitate:

$x_{ij} \geq 0.$

Obiectivul modelului este maximizarea profitului pe care îl determinăm ca diferenţă între venitul total şi costul total:

$$\sum_{j=1}^{3} c_j \sum_{i=1}^{4} x_{ij} - \sum_{i=1}^{4} k_i \sum_{j=1}^{3} x_{ij} .$$

Pentru datele problemei noastre programul liniar este:

$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 30$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 20$

$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 40$

$x_{41} + x_{42} + x_{43} \leq 10$

$$\frac{x_{11}}{\sum_{i=1}^{4} x_{i1}} \leq 0{,}3 \quad , \quad \frac{x_{12}}{\sum_{i=1}^{4} x_{i2}} \leq 0{,}5 \quad , \quad \frac{x_{13}}{\sum_{i=1}^{4} x_{i3}} \leq 0{,}7$$

$$\frac{x_{21}}{\sum_{i=1}^{4} x_{i1}} \geq 0{,}4 \quad , \quad \frac{x_{22}}{\sum_{i=1}^{4} x_{i2}} \geq 0{,}1 , \quad \frac{x_{31}}{\sum_{i=1}^{4} x_{i1}} \leq 0{,}5$$

$x_{ij} \geq 0 \;, i = 1,..., 4 \;, j = 1, 2, 3$

$$(max) f = \{[2{,}75(x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41})+2{,}25(x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42})+1{,}75(x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43})] - [1{,}50(x_{11}+x_{12}+x_{13})+3(x_{21}+X_{22}+x_{23})+2(x_{31}+x_{32}+x_{33})+2{,}50(x_{41}+x_{42}+x_{43})]\}$$

O forma mai simplă a acestui model poate fi obţinuta prin transformări simple:

$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 30$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 20$

$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 40$

$x_{41} + x_{42} + x_{43} \leq 10$

$7x_{11} - 3(x_{21} + x_{31} + x_{41}) \leq 0$

$x_{12} - x_{22} - x_{32} - x_{42} \leq 0$

$3x_{13} - 7(x_{32} + x_{33} + x_{43}) \leq 0$

$2x_{11} - 3x_{12} + 2x_{31} + 2x_{41} \leq 0$

$x_{12} - 9x_{22} + x_{32} + x_{42} \leq 0$

$-x_{11} - x_{21} + x_{31} - x_{41} \leq 0$

$x_{ij} \geq 0 \;, \; i = 1,..., 4 \;, \; j = 1, 2, 3$

$(max) f$

Cantitatea ce urmează a fi produsă lunar din benzina *Bj* este:

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} \quad , \quad j = 1, 2, 3$$

Să observăm în cazul acestei probleme importanța pe care o prezintă alegerea variabilelor de decizie. Astfel, dacă în formularea modelului s-ar fi considerat ca variabile:

y_j - producția de benzină tip B_j ce urmează a fi realizată și

z_{ij} - proporția derivatului D_i în benzina B_j ,

modelul obținut ar fi fost neliniar și anume:

$$y_1z_{11} + y_2z_{12} + y_3z_{13} \leq 30$$
$$y_1z_{21} + y_2z_{22} + y_3z_{23} \leq 20$$
$$y_1z_{31} + y_2z_{32} + y_3z_{33} \leq 40$$
$$y_1z_{41} + y_2z_{42} + y_3z_{43} \leq 10$$
$$z_{11} \leq 0,3$$
$$z_{12} \leq 0,5$$
$$z_{13} \leq 0,7$$
$$z_{12} \geq 0,4$$
$$z_{22} \geq 0,1$$
$$z_{31} \leq 0,5$$
$$z_{ij} \geq 0, \ y_j \geq 0 \ , \ i = 1,..., 4, \ j = 1, 2, 3$$
$$(max)g = \{2,75y_1 + 2,25y_2 + 1,75y_3 - [1,5(y_1z_{11} + y_2z_{12} + y_3z_{13}) + 3(y_1z_{21} + y_2z_{22} + y_3z_{23}) + 2(y_1z_{31} + y_2z_{32} + y_3z_{33}) + 2,5(y_1z_{41} + y_2z_{42} + y_3z_{43})]\}$$

1-5. O firmă producătoare de articole de papetărie realizează un anumit tip de hârtie de ambalaj în role cu lățimea de 10 și 20 inches, toate având aceeași lungime. De regulă clienții firmei solicită acest tip de hârtie în role cu lățimea de 9, 7 și 5 inches. Firma a primit o comandă de 20.000 role cu lățimea de 9 inches, 30.000 role de 7 inches și 10.000 role de 5 inches.

Știind că rolele de 10 și 20 inches disponibile pentru tăiere sunt în cantități suficiente, scrieți un model liniar în vederea satisfacerii acestei comenzi astfel încât numărul de role tăiate să fie minim. Cum se modifică acest model dacă se urmărește minimizarea restului total inutilizabil obținut în urma tăierii rolelor de 10 și 20 inches în role de 9, 7 și 5 inches?

Soluție

În vederea scrierii modelului vom genera mai întâi toate "rețetele" maximale de croire a rolelor de 10 şi 20 inches în role de 9, 7 şi 5 inches.

Tabelul 1.4

Rola / Rețete	10 [inches]			20 [inches]						Cerere [buc]
	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5	ρ_6	
9 [inches]	1	-	-	2	1	1	-	-	-	20.000
7 [inches]	-	1	-	-	1	-	2	1	-	30.000
5 [inches]	-	-	2	-	-	2	1	2	4	10.000
Rest inutilizabil [inches]	1	3	0	2	4	1	1	3	0	

Notăm cu x_{ij} numărul rolelor de tip i (i = 1, 2) tăiate după rețeta j (j = 1,..., 6). Urmărind minimizarea numărului de role tăiate modelul este:

$$
\begin{aligned}
&x_{11} + 2x_{21} + x_{22} + x_{23} \geq 20.000\\
&x_{12} + x_{22} + 2x_{24} + x_{25} \geq 30.000\\
&2x_{13} + 2x_{23} + x_{24} + 2x_{25} + 4x_{26} \geq 10.000
\end{aligned}
$$

$x_{ij} \geq 0$, întregi , $i = 1, 2$, $j = 1,..., 6$

$(min)\, f = x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26}$

Modificarea ce are loc în cazul în care se urmăreşte minimizarea restului total inutilizabil priveşte funcția obiectiv care devine:

$(min)\, f = x_{11} + 3x_{12} + 2x_{21} + 4x_{22} + x_{23} + x_{24} + 3x_{25}$

Variabilele sunt supuse aceloraşi restricții din modelul anterior.

1-6. O companie de transporturi aeriene vă propune să elaborați un orar de zbor al avioanelor sale de aşa manieră încât cheltuielile legate de efectuarea acestor zboruri să fie minime. Ea are în dotare mai multe tipuri de avioane şi deserveşte 4 trasee. Vi se pun la dispoziție informațiile din tabelul 1.5.

Tabelul 1.5

Tip de avion	Capacitate (număr de pasageri)	Număr de avioane existente in dotare	Număr maxim zilnic de zboruri (diferențiate pe tip de avion şi rută)			
			1	2	3	4
1	50	5	3	2	2	1
2	30	8	4	3	3	2
3	20	10	5	5	4	2
Număr de pasageri estimat pe zi			100	200	90	120

Cheltuielile de zbor depind de tipul de avion folosit ca şi de ruta aleasă. De asemenea, un loc gol într-o cursă înseamnă o pierdere pentru companie. Datele referitoare la aceste cheltuieli sunt date în tabelul 1.6:

Tabelul 1.6

Tip avion	Cheltuieli [u.m.] necesare efectuării unui zbor pe ruta			
	1	2	3	4
1	1000	1100	1200	1500
2	800	900	1000	1000
3	600	800	800	900
Pierderi pentru un loc gol [u.m.]	40	50	45	70

Scrieți un model liniar în vederea determinării orarului de zbor solicitat de companie.

Soluție

Vom nota cu x_{ij} numărul de avioane de tip i destinate să efectueze curse pe ruta j ($i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, 4$).

Restricțiile ce compun modelul sunt:

a) Restricții privind încadrarea în disponibilul de avioane:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 5$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 8$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 10$$

b) Restricții privind satisfacerea cererilor estimate:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 100$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 200$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 90$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 120$$

c) Restricții privind încadrarea în numărul maxim de zboruri admis:

$$x_{11} \leq 3 \ , \ x_{12} \leq 2 \ , \ x_{13} \leq 2 \ , \ x_{14} \leq 1$$
$$x_{21} \leq 4 \ , \ x_{22} \leq 3 \ , \ x_{23} \leq 3 \ , \ x_{24} \leq 2$$
$$x_{31} \leq 5 \ , \ x_{32} \leq 5 \ , \ x_{33} \leq 4 \ , \ x_{34} \leq 2$$

Funcția obiectiv are două componente:

- cheltuielile ocazionate de efectuarea propriu-zisă a zborurilor:

$$\begin{aligned} f_1 = {} & 1000x_{11} + 1100x_{12} + 1200x_{13} + 1500x_{14} + \\ & +800x_{21} + 900x_{22} + 1000x_{23} + 1000x_{24} + \\ & +600x_{31} + 800x_{32} + 800x_{33} + 900x_{34} \end{aligned}$$

- pierderile datorate efectuării unui zbor sub capacitatea maximă de încărcare a avioanelor. De exemplu, pe ruta 1 se efectuează x_{11} zboruri cu avioane de tip 1, x_{21} zboruri cu avioane de tip 2 şi x_{31} zboruri cu avioane de tip 3, putându-se transporta $50x_{11} + 30x_{21} + 20x_{31}$ pasageri. Diferența $50x_{11} + 30x_{21} + 20x_{31} - 100$ reprezintă locurile goale în cursele efectuate, existența lor însemnând o pierdere de profit pentru companie. Pierderile totale datorate acestor locuri goale sunt exprimate de funcția:

$$\begin{aligned} f_2 = {} & 40(50x_{11} + 30x_{21} + 20x_{31} - 100) + 50(50x_{12} + 30x_{22} + 20x_{32} - 200) + \\ & 45(50x_{13} + 30x_{23} + 20x_{33} - 90) + 70(50x_{14} + 30x_{24} + 20x_{34} - 120) \end{aligned}$$

Compania urmăreşte minimizarea cheltuielilor şi a pierderilor deci modelul va avea drept funcție obiectiv:

$$(min)f = f_1 + f_2$$

În fine, modelul va fi completat cu restricțiile explicite de nenegativitate şi integritate ce rezultă din însăşi natura variabilelor x_{ij} :

$x_{ij} \geq 0$, întregi , $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3, 4$.

1-7. Care sunt cele două probleme de optim pe care o firmă le poate formula relativ la activitatea sa de producție modelată cu ajutorul funcțiilor de producție?

1-8. Considerăm o firmă al cărei scop este maximizarea venitului obținut ca urmare a desfăşurării a două activități A_1 şi A_2 în condițiile limitării disponibilului a trei dintre resursele sale R_1, R_2, R_3 la cantitățile date în tabelul 1.7.

Tabelul 1.7

A_j / R_i	Consum specific de resursă		Disponibil de resursă
	A_1	A_2	
R_1	2	1	5
R_2	1	3	6
R_3	-	2	6

Notând cu $V(x_1, x_2)$ funcția venit a firmei, unde x_1 şi x_2 reprezintă nivelurile până la care sunt dezvoltate cele două activități şi ştiind că V este o funcție neliniară de x_1 şi x_2, se cere:

a) Construiți modelul corespunzător maximizării venitului firmei cu respectarea restricțiilor privind cantitățile de resurse disponibile;
b) Scrieți forma canonică de maximizare a modelului de la a);
c) Scrieți şi interpretați condițiile de optimalitate de ordinul întâi (condițiile Kuhn-Tucker) corespunzătoare acestui model.

1-9. Compania Quicker Oats doreşte să determine cât anume din bugetul său de 200.000$ alocat activității de reclamă-promovare trebuie cheltuit în următoarele medii: televiziune (TV), radio (R), reviste (M) şi campanii publicitare (CP). Fiecare dolar cheltuit în TV conduce la creşterea vânzărilor cu 10$, R şi M conduc la o creştere cu 5$ a vânzărilor, iar CP la o creştere cu 20$. Cheltuielile cu TV nu pot depăşi jumătate din bugetul total, iar suma investită în R trebuie să fie de cel puțin 20% din totalul sumei investită în TV. Cel puțin 20.000$ trebuie cheltuiți pentru M, şi nu mai mult de 25.000$ trebuie cheltuiți pentru CP. Obiectivul managementului firmei constă în maximizarea creşterii totale a vânzărilor firmei Quicker. Formulați această decizie ca pe un model liniar.

1-10. Conformity Systems are trei angajați: un funcționar-contabil, un dactilograf şi un stenograf. Fiecare dintre aceştia va fi repartizat pe unul dintre următoarele posturi: sortare-clasare documente, întocmire registre contabile şi pregătirea de rapoarte. Managerul doreşte să repartizeze angajații pe cele trei job-uri astfel încât costul total să fie minim. Costurile pentru fiecare asignare posibilă angajat-post sunt date în tabelul de mai jos.

Tabelul 1.8

Angajat	Post		
	Sortare-clasare documente	Întocmire registre contabile	Pregătirea de rapoarte
Funcționar-contabil	20$	25$	35$
Dactilograf	25$	20$	30$
Stenograf	30$	25$	25$

Considerând fiecare pereche angajat-post drept o variabilă separată, formulați această problemă ca pe un model liniar.

1-11. Ace Widgest îşi realizează produsele în două puncte de lucru: A la costul de 10$ pe bucată şi B la costul de 11$ pe bucată. Produsele sunt transportate către trei depozite C, D, E la costul de 0,01$ pe milă. Distanțele (mile) de la punctele de lucru la depozite sunt date în tabelul următor.

Tabelul 1.9

De la	Distanțe către		
	C	*D*	*E*
A	100	200	300
B	200	100	200

Unitatea *A* poate produce 1.000 bucăți, în timp ce capacitatea unității *B* este de 500 bucăți. Fiecare dintre depozite solicită 500 bucăți. Firma Ace Widgest trebuie să determine structura (programul) de producție-transport care să răspundă acestor cerințe şi să corespundă costului minim. Construiți modelul liniar corespunzător acestei probleme de producție-transport.