## 3. Variante ale problemei de transport

În dezvoltările teoretice din secțiunile precedente condiția de echilibru (1.2.5) a fost esențială. În foarte multe contexte practice însă, această condiție nu este îndeplinită Deasemenea este posibil ca unele ipoteze sau constante ale problemei de transport să se modifice de la o perioadă la alta antrenând schimbări de amploare mai mică sau mai mare în soluția optimă. În fine, nu puține sunt situațiile concrete ce nu implică "transporturi" în sensul strict al cuvîntului, dar care pot fi modelate ca probleme de transport.

### 3.1 Probleme de transport neechilibrate

În cazul în care în problema generală de transport (secțiunea 1.2) totalul cantităților disponibile la furnizori întrece totalul cererilor consumatorilor:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=i}^{n} b_j$$

ne putem reduce la o problemă de transport echilibrată introducând un *consumator fictiv* $C_{n+1}$ a cărui "cerere" să fie egală cu *excesul de disponibil*:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Costurile unitare de transport de la furnizorii reali către $C_{n+1}$ se iau egale cu *zero*. După rezolvarea problemei echilibrate, *cantitățile "livrate" consumatorului fictiv se vor interpreta drept cantități rămase în stocurile furnizorilor.*

Dacă totalul cantităților disponibile este mai mic decât cererea totală:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=i}^{n} b_j$$

problema de transport, așa cum a fost ea definită în secțiunea 1.2, este *incompatibilă* (vezi inegalitatea (1.2.1)). *Putem încerca o rezolvare parțială a cererilor*, introducând un *furnizor fictiv* $F_{m+1}$ al cărui "disponibil"să fie egal cu *cererea neacoperită*:

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

Din nou, costurile unitare de transport pe rutele ce leagă acest "furnizor" de consumatorii reali se iau egale cu *zero.* Obținem o problemă de transport echilibrată, în a cărei soluție optimă, *cantitățile "livrate" de furnizorul fictiv se vor interpreta drept cereri neacoperite.*

Mult mai aproape de realitate ni se pare următoarea abordare. Să presupunem că furnizorii $F_1, F_2,..., F_m$ sunt bazine carbonifere iar consumatorii $C_1, C_2,..., C_n$ sunt termocentrale. Să admitem că într-o perioadă normală de lucru (să zicem o lună) cantitatea de cărbune Q necesară termocentralelor, reprezentată prin suma $b_1+b_2+...+b_n$ a cererilor este egală cu cantitatea totală de cărbune posibil de livrat de către centrele miniere, cantitate reprezentată prin suma $a_1+a_2+...+a_m$. Cunoscând costurile unitare de transport ale cărbunelui pe calea ferată sau cu alte mijloace (naval, auto) se poate determina un program de satisfacere a necesarului de cărbune al termocentralelor care să implice un cost total minim. Să presupunem că în luna următoare sunt anunțate o serie de

acțiuni greviste la unele centre miniere. Este posibil ca nu toate sindicatele miniere din acelaşi bazin carbonifer să adere la grevă ceea ce face ca producția de cărbune să scadă într-o măsură mai mică sau mai mare. Fie $a_1', a_2', ...., a_m'$ producțiile lunare în condiții de criză şi Q'< Q suma acestora.

*Într-o asemenea situație critică este mai logic ca fiecare termocentrală să primească o parte proporțională cu cererea sa în condiții normale de aprovizionare*, adică:

$$\frac{b_1'}{b_1} = \frac{b_2'}{b_2} = \ldots = \frac{b_n'}{b_n}$$

$b_1', b_2', \ldots, b_n'$ fiind cantitățile ce urmează a fi primite în situația de criză. Noile cantități se pot deduce uşor, observând că fiecare raport $\frac{b_j'}{b_j}$ este egal cu:

$$\frac{b_1' + b_2' + \cdots + b_n'}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = \frac{a_1' + a_2' + \cdots a_m'}{a_1 + a_2 + \cdots + a_m} = \frac{Q'}{Q}$$

de unde:

$$b_j' = \frac{Q'}{Q} b_j \quad j = 1,\ldots,n.$$

O dată stabilite cantităţile $b_i'$ avem o problemă de transport echilibrată pe care o rezolvăm cu algoritmul descris.

**Exemplul 3.1.1** Patru termocentrale $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ se aprovizionează cu cărbune de la trei mine $F_1$, $F_2$, $F_3$. Necesarul lunar al termocentralelor, producţiile lunare ale minelor şi costurile transportului unei unităţi fizice de cărbune (1000 t.) pe diferitele rute sunt date în tabelul 3.1.1

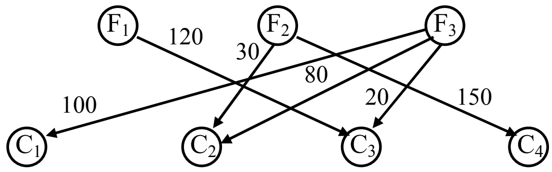
| | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | Disponibil |
|---|---|---|---|---|---|
| $F_1$ | 3 | 2 | 1 | 5 | 120 |
| $F_2$ | 4 | 3 | 7 | 2 | 180 |
| $F_3$ | 3 | 3 | 5 | 6 | 200 |
| Necesar | 100 | 110 | 140 | 150 | 500 |

Tabelul 3.1.1

Cu metoda diferenţelor maxime, se obţine direct programul optim de aprovizionare din tabelul 3.1.2. Rutele utilizate în acest program sunt evidenţiate în figura alăturată.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | 120 | |
| | 30 | | 150 |
| 100 | 80 | 20 | |

$\Rightarrow$




Tabelul 3.1.2

Costul asigurării transporturilor din program se ridică la 1150 u.m.

Pentru luna următoare unele sindicate miniere preconizează o serie de acţiuni greviste.Ca urmare a acestora se estimează că producţia totală de cărbune va scade cu 30% fiind repartizată astfel: 100 mii t. la mina $F_1$ şi numai 120, respectiv 130 mii t. la minele $F_2$ şi $F_3$ deci un total de 350 mii t. faţă de o cerere de 500 mii t.

Problema repartizării producţiei diminuate se poate pune în două moduri:

- *urmărind în exclusivitate criteriul minimizării cheltuielilor de transport.* “Reechilibrăm” problema prin introducerea unei “mine” fictive $F_4$ a cărei producție lunară să fie egală cu cantitatea cu care s-a diminuat producția curentă a minelor reale, adică 150 mii t. Neexistând transporturi efective între $F_4$ şi $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ costurile unitare de transport pe rutele corespunzătoare vor fi luate, firesc, egale cu zero. Vezi tabelul 3.1.3.

| | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | Disponibil |
|---|---|---|---|---|---|
| $F_1$ | 3 | 2 | 1 | 5 | 100 |
| $F_2$ | 4 | 3 | 7 | 2 | 120 |
| $F_3$ | 3 | 3 | 5 | 6 | 130 |
| $F_4$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 150 |
| Necesar | 100 | 110 | 140 | 150 | 500 |

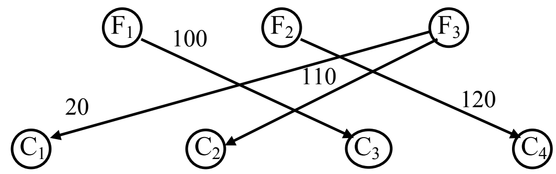
Tabelul 3.1.3

Rezultă două soluții optime indicate în tabelele 3.1.4 şi 3.1.5. Costul de transport aferent este de 730 u.m.

În prima variantă numai cererea termocentralei $C_2$ este integral acoperită, $C_1$ primind numai 20%, $C_3$ numai 71% iar $C_4$ numai 80% din necesarul curent. În a doua variantă $C_1$ primeşte cantitatea normală, $C_2$ numai 27% iar $C_3$ şi $C_4$ procentele anterioare. După cum se vede reducerea cu 30% a producției normale este repartizată foarte diferit pe consumatori.

| | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $F_1$ | | | 100 | |
| $F_2$ | | | | 120 |
| $F_3$ | 20 | 110 | | |
| $F_4$ | 80 | | 40 | 30 |

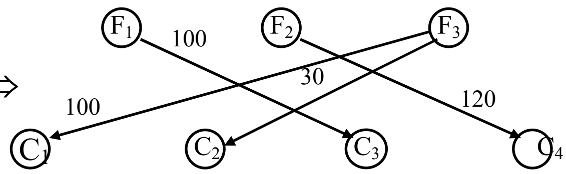
$\Rightarrow$




Tabelul 3.1.4

| | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $F_1$ | | | 100 | |
| $F_2$ | | | | 120 |
| $F_3$ | 100 | 30 | | |
| $F_4$ | | 80 | 40 | 30 |

$\Rightarrow$




Tabelul 3.1.5

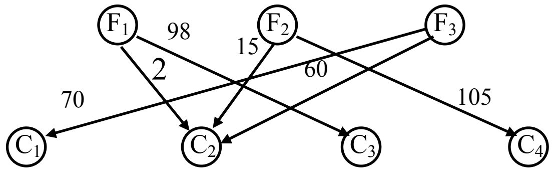
- *repartizând producția diminuată proporțional cu cererile normale.*

Producția diminuată reprezintă 70% din cea normală, astfel că termocentralele $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ ar urma să primească $100 \cdot 0{,}7=70$ mii t, $110 \cdot 0{,}7=77$ mii t, $140 \cdot 0{,}7=98$ mii t, respectiv $150 \cdot 0{,}7=105$ mii t.

Rezolvând problema echilibrată rezultată obținem soluția:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 2 | 98 | |
| | 15 | | 105 |
| 70 | 60 | | |

⇒




**Exemplul 3.1.2** Datorită dezvoltării şi extinderii capacităților de producție, conducerea firmei X a decis să facă noi angajări în fiecare din cele cinci fabrici ale sale, conform datelor din următorul tabel:

| Fabrica | I | II | III | IV | V | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Nr. de noi angajați | 45 | 74 | 50 | 82 | 63 | 314 |

Noul personal este recrutat din 3 oraşe mari aflate în zonă, prin intermediul unor agenții specializate. Contactând aceste agenții, firma a găsit convenabile următoarele oferte:

| Agenția din oraşul | A | B | C | Total |
|---|---|---|---|---|
| Număr de oferte convenabile ptr. firmă | 120 | 100 | 154 | 374 |

Fabricile sunt situate într-o zonă rurală aşa că, în discuțiile cu sindicatele interesate, firma a convenit să suporte cheltuielile zilnice de întoarcere de la locul de muncă la oraş, la toți angajații noi, cheltuieli evaluate la 12 u.m. pe persoană × km. Distanțele în km dintre fabrici şi oraşe sunt indicate în următorul tabel:

| | I | II | III | IV | V |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 6 | 2 | 2 | 6 | 3 |
| B | 14 | 9 | 4 | 5 | 3 |
| C | 10 | 4 | 11 | 3 | 4 |

Pentru început conducerea firmei este interesată în a cunoaşte câte persoane ar putea fi angajate astfel încât cheltuielile totale de transport să fie cât mai mici cu putință.

Întrucât disponibilul de personal este mai mare decât cererea, vom introduce o "fabrică fictivă" VI a cărei cerere să fie de 374-314 = 60 noi angajați. Obținem o problemă echilibrată de transport cu datele din tabelul 3.1.6 al cărei obiectiv este *minimizarea numărului total de persoane× km.*

| | I | II | III | IV | V | VI | Disponibil |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 6 | 2 | 2 | 6 | 3 | 0 | 120 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | 14 | 9 | 4 | 5 | 3 | 0 | 100 |
| C | 10 | 4 | 11 | 3 | 4 | 0 | 154 |
| Cerere | 45 | 74 | 50 | 82 | 63 | 60 | 374 |

Tabelul 3.1.6

Deoarece pe rutele care leagă oraşele A, B, C de "fabrica" VI nu vor avea loc transporturi de personal, costurile unitare au fost luate egale cu zero.

Aplicând algoritmul de rezolvare descris în secțiunea 2.4 se obține următorul program posibil de angajări (vezi tabelul 3.1.7).Toți cei 120 de candidați din oraşul A vor fi angajați : 45 la fabrica I, 62 la fabrica II şi restul la fabrica III. la fel, candidații din B vor fi angajați în totalitate: 37 la fabrica III şi 63 la fabrica V. Din C vor fi acceptate numai 94 de oferte din cele 154 disponibile adică 61%. Rezultă un total (minim) de 1051 oameni × km transportați pentru care firma trebuie să plătească zilnic 12612 u.m.

| | I | II | III | IV | V | VI |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 45 | 62 | 13 | | | |
| B | | | 37 | | 63 | |
| C | | 12 | | 82 | | 60 |
| | 45 | 74 | 50 | 82 | 63 | |

Tabelul 3.1.7

Conducerea firmei este de părere că adoptarea acestui program ar creea o imagine nefavorabilă firmei pe piața forței de muncă prin "discriminarea" potențialilor lucrători din C față de cei din A sau B şi decide să examineze şi alte variante. Astfel, pentru a nu apare ca "incorectă"față de candidații potențiali dintr-un oraş sau altul, s-a decis ca surplusul de 60 de oferte ce nu vor putea fi acceptate să fie repartizat în mod egal între cele trei oraşe, adică 20 de fiecare. Firma doreşte să ştie care va fi efectul acestei hotărâri asupra cheltuielilor cu transportul noilor angajați.

Reluăm problema fixând numărul de oferte acceptabile la 120 - 20 = 100 pentru oraşul A, 100 - 20 = 80 pentru B şi 154 - 20 = 134 pentru C.(total 314). Rezultă soluția din tabelul 3.1.8. Conform acesteia, numărul total de persoane×km transportați va creşte la 1087, implicând cheltuieli zilnice în valoare de 13044 u.m., cu 3,43 % mai mari decât în varianta studiată anterior. Noul program satisface oferta de forță de muncă în proporție de 83,3 % pentru A, 80 % pentru B şi

| | I | II | III | IV | V |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 45 | 22 | 33 | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| B | | | 17 | | 63 |
| C | | 52 | | 82 | |

Tabelul 3.1.8

87 % pentru C.

Plecând de la ultima soluție, conducerea firmei dorește să cunoască ce implicații ar putea avea asupra cheltuielilor de transport satisfacerea ofertelor *în aceeași proporție.*

Notând cu $a_1$, $a_2$, $a_3$ volumul ofertelor acceptabile din A, B, repectiv C este necesar ca:

$$\frac{a_1}{120} = \frac{a_2}{100} = \frac{a_3}{154} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{120 + 100 + 154} = \frac{314}{374}$$

din care rezultă: $a_1$ = 101 , $a_2$ = 84 , $a_3$ = 129. Cu noile date se obține programul:

| | I | II | III | IV | V |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 45 | 27 | 29 | | |
| B | | | 21 | | 63 |
| C | | 47 | | 82 | |

Soluția găsită implică 1089 oameni × km de transportat zilnic la un cost de 13068 u.m., cu 3,6 % mai mare decât în prima variantă.

Tabelul 3.1.9

Firește, în adoptarea deciziei asupra variantei finale a programului de noi angajări, conducerea firmei poate să țină seama și de alte cerințe care nu au fost avute în vedere în studiul întreprins. În consecință, soluțiile sintetizate în tabelele 3.1.7 , 3.1.8 și 3.1.9 trebuiesc considerate ca simple "scenarii" menite să ajute factorii decizionali în luarea unei hotărâri cât mai bune!

## 3.2 Blocarea unor rute

Până în prezent am admis că orice rută dintre un furnizor și un consumator poate fi utilizată la un cost de transport mai mic sau mai mare. Sunt cazuri în care, din diferite motive una sau mai multe rute nu pot fi utilizate. “Blocarea “ acestor rute se va face prin introducerea unor costuri unitare de transport foarte mari. Concret, dacă ruta ($F_i$,$C_j$) nu mai poate fi folosită vom lua $c_{ij}$ = M unde M este o constantă pozitivă foarte mare.

**Exemplul 3.2.1** În exemplul 3.1.1 am determinat programul lunar normal de aprovizionare cu cărbune al celor patru termocentrale în ipoteza că toate rutele erau disponibile (tabelul 3.1.2). Evident, acest program nu va suferi nici o modificare în cazul în care se blochează o rută ce nu era prevăzută a fi utilizată. Să presupunem că în luna următoare ruta ($F_3$,$C_3$) se va închide temporar din cauza unor lucrări de modernizare. În acest fel, mina $F_3$ nu mai poate aproviziona direct termocentrala $C_3$. Pentru a determina schimbările din programul actual cauzate de această întrerupere reevaluăm mărimile $\Delta_{ij}$ luând de astă dată în calcul $c_{33}$ = M » 0

| | $v_1$= 3 | $v_2$=3 | $v_3$=M | $v_4$=2 |
|---|---|---|---|---|
| $u_1$=1-M | | | 120 | |
| $u_2$ = 0 | | 30 | | 150 |
| $u_3$ = 0 | 100 | 80 | 20 | |

⇒

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1-M | 2-M | * | -2-M |
| -1 | * | M-7 | * |
| * | * | * | -4 |

Tabelele 3.2.1 - 3.2.2

Deoarece $\Delta_{23}$ = M - 7 > 0, soluția curentă nu mai este optimă; ea se îmbunătățeşte folosind conturul poligonal indicat.

Noul program de transport, pus în evidență în tabelul 3.2.3 nu mai utilizează ruta blocată ($F_3$,$C_3$) şi ca urmare costul său creşte, ajungând la 1190 u.m.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | 120 | |
| | 10 | 20 | 150 |
| 100 | 100 | | |

Tabelul 3.2.3

**Exemplul 3.2.2** Vom studia acum o problemă de transport "parametrică' care extinde într-un fel considerațiile anterioare. Reluăm problema aprovizionării cu cărbune a termocentralelor din exemplul precedent (cu datele din tabelul 3.1.1). Să presupunem că pentru transportul cărbunelui de la mina $F_1$ la termocentrala $C_3$ există mai multe variante ce pot fi folosite într-o lună sau alta în funcție de programul de întreținere, reparare şi modernizare a rețelei de căi ferate. Posibilele schimbări ale traseului au un efect direct asupra costului unitar de transport $c_{13}$ = 1 luat inițial în calcul. Ne propunem să studiem efectul pe care îl are variația costului $c_{13}$ asupra programului optim de transport şi a costului total aferent. Pentru aceasta, considerăm soluţia optimă determinată în cazul particular $c_{13}$ = 1 (vezi tabelul 3.1.2) şi recalculăm mărimile $\Delta_{ij}$ luînd $c_{13} = \lambda \geq 0$ variabil.

| | $v_1 = 3$ | $v_2 = 3$ | $v_3 = 5$ | $v_4 = 2$ |
|---|---|---|---|---|
| $u_1 = \lambda - 5$ | | | 120 | |
| $u_2 = 0$ | | 30 | | 150 |
| $u_3 = 0$ | 100 | 80 | 20 | |

$\Rightarrow$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\lambda$ -5 | $\lambda$ -4 | * | $\lambda$ -8 |
| -1 | * | -2 | * |
| * | * | * | -4 |

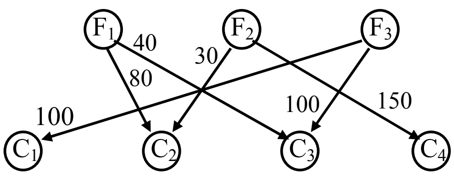
Tabelele 3.2.4 - 3.2.5

Condiţia de optimalitate $\Delta_{ij} \leq 0$ conduce la concluzia că atâta timp cât $c_{13} \leq 4$ programul optim de transport este cel afişat în tabelul 3.1.2 (sau 3.2.4) cu costul total $f = 1030 + 120c_{13}$.

Dacă $c_{13}$ depăşeşte "cu puţin" 4 din tabelul 3.2.5 rezultă $\Delta_{12} > 0$ şi soluţia din tabelul alăturat nu mai este optimă. Folosind conturul poligonal asociat rutei (1,2) - indicat în tabel - rezultă soluţia din tabelul 3.2.6

| | $v_1=3$ | $v_2=7-\lambda$ | $v_3=5$ | $v_4=6-\lambda$ |
|---|---|---|---|---|
| $u_1=\lambda-5$ | | 80 | 40 | |
| $u_2=\lambda-4$ | | 30 | | 150 |
| $u_3=0$ | 100 | | 100 | |

$\Rightarrow$




Tabelul 3.2.6

Testarea optimalităţii acestei soluţii este făcută în tabelul 3.2.7 folosind valorile $\overline{u}_i, \overline{v}_j$ înscrise la stânga şi deasupra tabelului 3.2.6. Condiţia $\Delta_{ij} \leq 0$ arată că soluţia găsită este optimă atâta timp cât $4 \leq c_{13} \leq 5$ .Costul asociat are valoarea $1350 + 40c_{13}$ u.m.

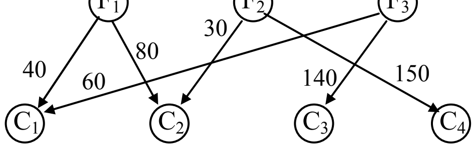
| | | | |
|---|---|---|---|
| $\lambda$ -5 | * | * | -4 |
| $\lambda$ -5 | * | $\lambda$ -6 | * |
| * | 4- $\lambda$ | * | - $\lambda$ |

Tabelul 3.2.7

Pentru $c_{13} > 5$ avem $\Delta_{11} = \Delta_{21} < 0$.Folosind conturul poligonal asociat rutei (1,1) se găseşte soluţia din tabelul 3.2.8 al cărei cost este de 1550 u.m.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 40 | 80 | | |
| | 30 | | 150 |

$\Rightarrow$



| | | | |
|---|---|---|---|
| 60 | | 140 | |

Tabelul 3.2.8

Se observă că pe măsură ce costul unitar $c_{13}$ creşte, ruta ($F_1$,$C_3$) este folosită din ce în ce mai puţin până când este abandonată.

### 3.3 Alte probleme reductibile la problema de transport

Deşi nu implică transporturi fizice unele probleme pot fi aduse la "formatul" problemei de transport.

**Exemplul 3.3.1** O firmă specializată în producerea de echipament electric are de expediat un număr de generatoare la sfârşitul lunilor Ianuarie, Februarie şi Martie. În fiecare lună, firma produce, în regim normal de lucru, un anumit număr de generatoare. Dacă necesităţile o impun, prin organizarea unr schimburi prelungite, firma poate produce şi peste plafoanele normale dar la un cost mai ridicat.

| Luna | Ianuarie | Februarie | Martie |
|---|---|---|---|
| Nivelul cererii (buc.) | 8 | 6 | 12 |
| Volumul producţiei în regim normal de lucru (buc.) | 7 | 7 | 7 |
| Volumul producţiei suplimentare (buc.) | 4 | 4 | 5 |
| Costul unui generator din producţia normală (u.m.) | 40 | 40 | 50 |
| Costul unui generator din producţia suplimentară (u.m.) | 50 | 60 | 80 |

Tabelul 3.3.1

După cum se vede, în luna Martie, când cererea este mai mare şi costurile de producţie sunt mai mari, ca urmare a unor tendinţe inflaţioniste ce pot fi previzionate din vreme: creşteri planificate ale salariilor sau creşterea preţurilor la materiile prime.

Deoarece costurile de producţie nu sunt constante, firma va fi interesată în a produce mai mult în lunile în care costurile sunt mai mici formând astfel un stoc de produse finite din care să acopere, cel puţin în parte, cererea din lunile în care costurile sunt mai mari. Pentru fiecare generator expediat în altă lună decât cea în care a fost produs, există un cost suplimentar de stocare de 10 u.m. pe lună.

*Obiectivul urmărit este elaborarea unui program de fabricație pentru satisfacerea comenzilor la un cost total de producție şi stocare minim.*

Pentru a formula o problemă de transport trebuie să identificăm mai întâi sursele şi destinațiile. În fiecare lună un generator poate fi produs în două moduri: în timpul normal de lucru sau "peste program"; vor exista deci $2\times3 = 6$ "surse" ale căror disponibile sunt nivelele de producție corespunzătoare. Astfel, sursa "*Ianuarie-producție normală*" are un disponibil de 7 bucăți în timp

ce sursa "*Martie-producție suplimentară*"are un disponibil de 5 bucăți. Destinațiile se identifică cu *sfârşiturile* celor trei luni când cererile trebuiesc acoperite.

Între cele 6 surse şi 3 destinații se creează $6\times3 = 18$ legături (rute); fiecare indică luna în care este produs un generator, modul în care acesta este produs (în regim normal de lucru sau "peste program") şi luna în care este expediat. Din cele 18 legături, 6 vor fi blocate deoarece exprimă un nonsens: livrarea unui produs finit într-o lună anterioară celei în care a fost fabricat!

Costurile unitare de transport pe rutele neblocate sunt în fapt costurile unitare de producție la care se adaugă eventualele cheltuieli de stocare. Astfel, pe ruta "*Ianuarie-producție suplimentară→ Martie*" costul unitar de transport va fi egal cu costul fabricării unui generator peste nivelul producției normale din Ianuarie la care se adaugă costul stocării pe două luni, adică $50+2\times10 = 70$ u.m.

Am obținut o problemă de transport ale cărei date sunt prezentate în tabelul 3.3.2.

| Destinații / Surse | Ianuarie | Februarie | Martie | Disponibil |
|---|---|---|---|---|
| Ian.-prod. normală | 40 | 50 | 60 | 7 |
| Ian.-prod, suplim. | 50 | 60 | 70 | 4 |
| Feb.-prod. normală | M | 40 | 50 | 7 |
| Feb.-prod. suplim. | M | 60 | 70 | 4 |
| Martie-prod. normală | M | M | 50 | 7 |
| Martie-prod. suplim. | M | M | 80 | 5 |
| | | | | 34 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Cerere | 8 | 6 | 12 | 26 |

Tabelul 3.3.2

Deoarece oferta totală întrece cererea totală (34 > 26) este necesar să *echilibrăm* problema introducând un "consumator "fictiv care să preia diferența 34 - 26 = 8 buc.

Invităm cititorul să rezolve problema echilibrată, avertizându-l că aceasta are mai multe soluții optime! Una dintre ele este interpretată în figura 3.3.1; costul asociat este de 1250 u.m.

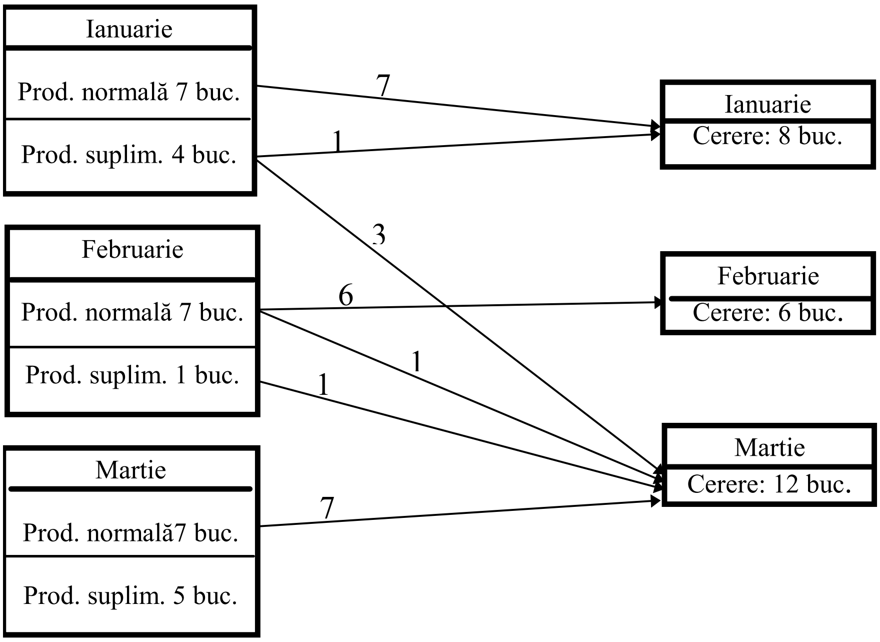



**Figura 3.3.1**

**Exemplul 3.3.2** Foarte des citată în literatura de specialitate este *problema patronului de restaurant.*

Patronul unui restaurant ştie că în raport cu mesele pe care a stabilit să le servească în următoarele $n$ zile (în regim de rezervare) va avea nevoie de $r_i$ şervete de masă curate, $i = 1,...,n$. Pentru procurarea acestor şervete el are la dispoziție două posibilități:

- fie să le cumpere la prețul de $a$ u.m. bucata;
- fie să trimită şervetele murdare la o spălătorie. În serviciul normal, şervetele spălate sunt livrate după $p$ zile la un cost de $c$ u.m. bucata; în serviciul de urgență, şervetele spălate se livrează după $q < p$ zile la un cost $b > c$ u.m. bucata.

*Pornind fără nici un şervet utilizabil, cum trebuie să procedeze patronul cu achiziționarea şi spălarea şervetelor astfel încât să minimizeze costul total pe perioada celor n zile?*

Pentru a trata problema enunțată ca o problemă de transport este necesar să identificăm: 1) produsul ce trebuie "transportat şi distribuit", 2) sursele,

3) destinațiile, 4) legăturile (rutele) permise între surse şi destinații şi 5) costurile unitare de transport.

1) Produsul de transportat şi distribuit îl constituie *şervetele "curate"*. După proveniență ele sunt de trei feluri: şervete "noi" cumpărate de la magazin, şervete "spălate în regim de urgență" şi şervete "spălate în regim normal".

2) Evident *o primă sursă de şervete curate o constituie stocul de şervete noi* pe care patronul *intenționează* să le cumpere de la magazin; notăm această sursă cu $F_0$. Deoarece, la urma urmei, fiecare şervet spălat a fost cândva nou este clar că la începutul perioadei patronul nu poate cumpăra mai puține şervete decât numărul maxim necesar într-o zi. Pe e altă parte, patronul poate cumpăra în fiecare zi numărul de şervete curate necesare.În concluzie, numărul S al şervetelor din stocul inițial $F_0$ *va trebui fixat* undeva între limitele specificate în următoarea inegalitate:

$$\max_{1 \le i \le n} r_i \le S \le \sum_{i=1}^{n} r_i \qquad (3.3.1\ )$$

Mai departe, la sfârşitul unei zile, să zicem $i$, *cele $r_i$ şervete murdare se constituie ca o sursă de şervete curate pentru zilele următoare* (fireşte, după ce în prealabil au fost spălate!).Face excepție ultima zi, a $n$-a, cînd şervetele murdare se aruncă pur şi simplu la deşeuri (se face ipoteza că în perioada următoare, patronul va utiliza alt stoc de şervete noi...).În consecință, pe lîngă "sursa" $F_0$, vom mai considera alte n - 1 "surse" $F_1$, $F_2$,..., $F_{n-1}$, corespunzătoare zilelor 1, 2,..., $n$-1, cu "disponibilele" $r_1$, $r_2$,..., $r_{n-1}$.

3) Este firesc ca *fiecare din cele n zile să fie socotită ca o destinație* a cărei cerere este egală cu numărul şervetelor curate.Vom avea deci $n$ destinații $C_1$, $C_2$,..., $C_n$ , corespunzătoare zilelor 1, 2,..., $n$ cu cererile $r_1$, $r_2$,..., $r_n$. Datorită relației (3.3.1) "oferta" totală de şervete curate acoperă cererea totală:

$$S + r_1 + r_2 + \cdots + r_{n-1} \geq r_1 + r_2 + \cdots + r_{n-1} + r_n \quad \Leftrightarrow \quad S \geq r_n$$

Dacă S = $r_n$ (care are loc numai dacă $r_n = \max_{1 \leq i \leq n} r_i$), problema este din start echilibrată; dacă S > $r_n$ , vom introduce o destinație suplimentară $C_0$ cu cererea S - $r_n$. Situația șervetelor cu "destinația" $C_0$ se interpretează diferit: acelea care "provin" de la sursa $F_0$ reprezintă șervete pe care patronul intenționa să le cumpere dar a renunțat deoarece nu mai avea nevoie de ele; cele care provin de

la oricare din sursele $F_1, F_2,..., F_{n-1}$ reprezintă șervete murdare care nu mai sunt trimise la spălat fiind aruncate la deșeuri.

4,5) Având în vedere semnificația ei, sursa $F_0$ este legată de toate destinațiile $C_1, C_2,..., C_n$ , "costul unitar" comun pe aceste rute fiind prețul de cumpărare al unui șervet nou. Să considerăm acum o sursă oarecare $F_i$, $i$ = 1, 2,..., $n$-1, al cărei "disponibil" este format din cele $r_i$ șervete folosite în ziua $i$. Aceste șervete, sau o parte din ele, devin disponibile pentru o nouă folosire abia după $q$ zile, adică după ce au fost trimise la spălătoria rapidă. În concluzie, "rutele" ($F_i$, $C_j$) cu $1 \leq j < i + q$ sunt lipsite de sens și vor fi *blocate* printr-un cost M foarte mare. Pe rutele ($F_i$, $C_j$) cu $i+ q \leq j < i + p$ se va "practica" costul $b$ al spălării unui șervet în regim de urgență iar pe rutele ($F_i$, $C_j$) cu $i + p \leq j \leq n$, se va practica costul $c$ al spălării unui șervet în regim normal. În fine, sunt permise toate rutele către destinația $C_0$ - în caz că aceasta trebuie avută în vedere! - cu costul comun zero.

Considerațiile precedente sunt ilustrate prin următorul caz concret:

$n$ = 5 zile

| ziua $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| cererea $r_i$ | 60 | 50 | 80 | 40 | 60 |

prețul unui șervet nou: $a$ = 5
durata serviciului normal: $p$ = 2 zile
durata serviciului rapid: $q$ = 1 zi
costul spălării unui șervet în regim de urgență: $b$ = 2 u.m.
costul spălării unui șervet în regim normal: $c$ = 1 u.m.

Din (3.3.1) rezultă că $80 \le S \le 280$. În tabelul (3.3.3) apar datele problemei de transport corespunzătoare.

| | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | $C_5$ | $C_0$ | Disponibil |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_0$ | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 0 | S |
| $F_1$ | M | 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 60 |
| $F_2$ | M | M | 2 | 1 | 1 | 0 | 50 |
| $F_3$ | M | M | M | 2 | 1 | 0 | 80 |
| $F_4$ | M | M | M | M | 2 | 0 | 40 |
| Necesar | 60 | 50 | 80 | 40 | 50 | S - 50 | S + 230 |

Tabelul 3.3.3

Problema are mai multe soluții optime; structura unora depinde de numărul S de șervete noi pe care patronul *intenționează* să le cumpere la început! Invităm cititorul să facă calculele necesare, luând ca model studiul problemei parametrice de transport din exemplul 3.2.2. Oricare din aceste soluții implică un cost total de 730 u.m. a cărui structură va fi detaliată pe soluția din tabelul 3.3.4.

| | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | $C_5$ | $C_0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_0$ | 60 | 20 | | | | S - 80 |
| $F_1$ | | 30 | 30 | | | |
| $F_2$ | | | 50 | | | |
| $F_3$ | | | | 40 | 40 | |
| $F_4$ | | | | | 10 | 30 |

Tabelul 3.3.4

Din prima linie a tabelului 3.3.4 rezultă că patronul va trebui să cumpere 80 de șervete noi: 60 vor fi folosite în prima zi, restul a doua zi.Din a doua linie rezultă că 30 din șervetele folosite în prima zi vor fi trimise la spălătoria rapidă pentru a fi disponibile a doua zi. Restul de 30 vor fi spălate în regim normal pentru a fi folosite în ziua a treia ș.a.m.d. Ultima linie arată că din cele 40 de șervete întrebuințate în a patra zi, 10 vor fi spălate rapid, pentru a putea fi folosite a doua zi iar celelalte 30 vor fi aruncate la deșeuri (acolo unde vor ajunge și cele 50 de șervete "murdărite" în ultima zi).

Tabelul poate fi "citit și pe coloane". Astfel din coloana a treia deducem că necesarul de șervete pentru a treia zi este asigurat prin spălarea în regim normal a 30 şervete folosite în prima zi şi prin spălarea în regim de urgență a celor 50 de şervete folosite în a doua zi.

În regim normal sunt spălate 30 + 40 = 70 şervete iar în regim de urgență 30 + 50 + 40 + 10 = 130 şervete. Structura costului total este deci următoarea:

$$80 \times 5 + 130 \times 2 + 70 \times 1 = 400 + 260 + 70 = 730 \text{ u.m.}$$

Structura soluției analizate este vizualizată în figura 3.3.2.

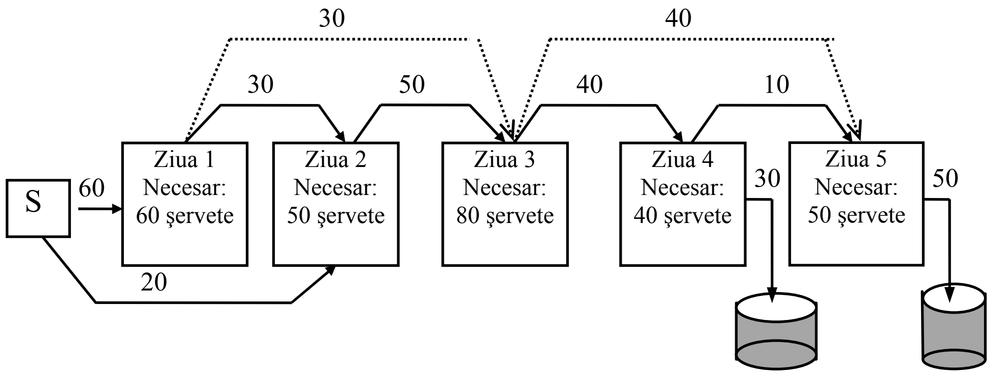



**Figura 3.3.2**