

2. Adaptarea metodei simplex la rezolvarea PTE

Fiind o problemă de programare liniară, PTE se poate rezolva cu ajutorul metodei simplex. Totuși, algoritmul simplex va avea în acest caz o descriere specifică datorită unei proprietăți importante pe care o are matricea A a coeficienților PTE. Într-adevăr, se poate demonstra că *orice determinant extras din A are valoarea -1 , 0 sau 1* . În consecință, dacă disponibilele a_1, a_2, \dots, a_m și cererile b_1, b_2, \dots, b_n sunt exprimate prin numere *întregi*, orice soluție de bază va avea componentele întregi și astfel PTE va avea cel puțin o soluție optimă cu componente întregi.

2.1 Determinarea unei soluții admisibile de bază inițiale

Să considerăm următorul procedeu general de construire a unei soluții admisibile a PTE. Componentele ei vor fi determinate progresiv și înscrise într-un tabel așa cum s-a menționat în observația din secțiunea 1.4.

Inițializare: Toate cele mn rute ale tabelului sunt considerate *neblockate*.

Etapa k , $k \geq 1$.

- Se alege o rută (F_{i_k}, C_{j_k}) dintre cele *neblockate*.
- Se pune $x_{i_k j_k} = \min(a_{i_k}, b_{j_k})$ și se *blochează* ruta *aleasă*. Vom spune că pe ruta (în celula) (F_{i_k}, C_{j_k}) s-a făcut *alocarea* $x_{i_k j_k}$.
- Se actualizează:

$$\begin{aligned} a_{i_k} &\leftarrow a_{i_k} - x_{i_k j_k} \\ b_{j_k} &\leftarrow b_{j_k} - x_{i_k j_k} \end{aligned}$$

- Dacă $a_{i_k} = 0$ se pune $x_{i_k j} = 0$ pe toate rutele (F_{i_k}, C_j) , $j \neq j_k$ încă *neblockate*, după care acestea se declară *blockate*.

Dacă $b_{j_k} = 0$ se pune $x_{i j_k} = 0$ pe toate rutele (F_i, C_{j_k}) , $i \neq i_k$ încă *neblockate*, după care acestea se declară *blockate*.

- Dacă toate cele mn rute au fost *blockate* STOP. Altminteri, se actualizează $k \leftarrow k + 1$ și se reiau operațiile de mai sus.

Se constată fără dificultate că ansamblul de valori numerice $x = (x_{ij})$ rezultate în urma aplicării algoritmului constituie o soluție admisibilă a PTE; *se poate arăta că x este o soluție de bază.*

În ipoteza că valorile x_{ij} au fost trecute *progresiv* în tabelul menționat la început, este ușor de văzut că *dacă la fiecare etapă se blochează fie rutele aparținând unui rând fie cele aparținând unei coloane, atunci soluția construită are exact $m + n - 1$ componente nenule, altfel spus este nedegenerată.* Dacă din contră, după efectuarea unei alocări, se blochează *simultan* atât rândul cât și coloana rutei în care s-a făcut alocarea, soluția rezultată va fi *degenerată!* Vom discuta în secțiunea 2.5 ce trebuie făcut în acest caz.

Toate metodele de generare a unei soluții inițiale pentru PTE au la bază procedura de mai sus. Ele *se deosebesc prin modul de alegere* a rutelor $(F_{i_1}, C_{j_1}), (F_{i_2}, C_{j_2}), \dots$. Astfel:

1) În metoda **colțului de nord - vest (N - V)**, prima rută aleasă este (F_1, C_1) . Celelalte se aleg astfel încât $1 = i_1 \leq i_2 \leq i_3 \leq \dots$ și $1 = j_1 \leq j_2 \leq j_3 \leq \dots$

2) În metoda **costului (unitar de transport) minim** prima rută (F_{i_1}, C_{j_1}) aleasă corespunde *celui mai mic cost unitar* de transport. La etapa k , ruta (F_{i_k}, C_{j_k}) corespunde *celui mai mic cost unitar* de transport de pe rutele încă *neblockate* la această etapă.

3) Metoda **diferențelor maxime (Vogel)** este o metodă mai elaborată. Presupunem costurile unitare de transport înscrise într-un tabel cu m rânduri și n coloane.

- Pe fiecare rând și pe fiecare coloană a acestui tabel se calculează *diferența* dintre *cel mai mic cost* de transport și *cel imediat superior*; dacă costul minim *nu* este unic, diferența se va lua egală cu *zero*.
- Se identifică rândul sau coloana cu *cea mai mare diferență* și aici, *în ruta de cost minim*, se execută prima *alocare* din algoritmul precedent.
- Se refac diferențele pe rândurile și coloanele *neblockate* folosindu-se numai *costuri "neblockate"*, după care se reia procedura de alocare.

Exemplul 2.1.1 Vom genera o soluție de bază inițială pentru problema de transport echilibrată din exemplul 1.4.1, folosind pe rând cele trei metode sus amintite.

1) Prin metoda colțului N - V se obține soluția:

10 ⁽¹⁾	5 ⁽²⁾		
	7 ⁽³⁾	9 ⁽⁴⁾	1 ⁽⁵⁾
			18 ⁽⁶⁾

Atenție:
numerele înscrise în paranteze
indică *ordinea* alocărilor!

Tabelul 2.1.1

Costul asociat acestei soluții: $f = 10 \times 3 + 5 \times 3 + 7 \times 4 + 9 \times 3 + 1 \times 6 + 18 \times 2 = 142$ u.m.

2) Prin metoda costului minim rezultă soluția:

	6 ⁽⁴⁾	9 ⁽¹⁾	
10 ⁽³⁾	6 ⁽⁵⁾		1 ⁽⁶⁾
			18 ⁽²⁾

Costul asociat: $f = 123$ u.m.

Tabelul 2.1.2

3) Prin metoda diferențelor maxime se obține soluția:

	5 ⁽⁶⁾	9 ⁽¹⁾	1 ⁽³⁾
10 ⁽⁴⁾	7 ⁽⁵⁾		
			18 ⁽²⁾

Costul asociat: $f = 122$ u.m.

Tabelul 2.1.3

(Cititorul este îndemnat să refacă " în dinamică" construcția soluțiilor de mai sus!)

Observație: Metoda colțului N - V, deși mai simplă, produce în general soluții cu cost mai ridicat deoarece nu ține seama în nici un fel de costurile unitare de transport. Celelalte metode, acordând prioritate rutelor "mai ieftine", dau soluții mai apropiate de soluția optimă.

Experimentele numerice au arătat că metoda diferențelor maxime produce de foarte multe ori chiar soluția optimă sau în orice caz o soluție foarte apropiată de aceasta, așa încât mulți utilizatori preferă s-o adopte ca soluție suboptimală.

2.2 Testarea optimalității unei soluții admisibile de bază a PTE

Fie $\bar{x} = (\bar{x}_{ij})$ o soluție admisibilă de bază a PTE, presupusă nedegenerată. Obiectivul este de a găsi o condiție pentru recunoașterea optimalității sale. Să considerăm duala problemei de transport echilibrate:

(Q) Să se determine $u^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_m^*)$ și $v^* = (v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*)$ care maximizează funcția:

$$g = \sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j$$

cu restricțiile:

$$u_i + v_j \leq c_{ij} \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n \quad (2.2.1)$$

Teorema ecarturilor complementare (cap.I, teorema 2.3.4) arată că soluția \bar{x} este optimă dacă și numai dacă există $(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$ care satisfac restricțiile (2.2.1) ale dualei (Q), astfel încât $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$ să verifice relațiile:

$$x_{ij}(u_i + v_j - c_{ij}) = 0 \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n \quad (2.2.2)$$

Să notăm cu I mulțimea rutelor (F_i, C_j) (sau mai simplu (i, j)) cu proprietatea că $\bar{x}_{ij} \neq 0$. Deoarece soluția \bar{x} a fost presupusă nedegenerată, mulțimea I are $m + n - 1$ elemente. Din (2.2.2) rezultă că, pentru a fi optimă, soluția duală (\bar{u}, \bar{v}) de mai sus trebuie să verifice relațiile:

$$u_i + v_j = c_{ij} \quad (\forall) (i, j) \in I \quad (2.2.3)$$

Să remarcăm că (2.2.3) este un sistem liniar cu $m + n - 1$ ecuații și $m + n$ variabile. Deoarece I se identifică cu un arbore maximal în graful G asociat PTE (a se revedea secțiunea 1.4 !), sistemul (2.2.3) este întotdeauna compatibil nedeterminat soluțiile sale fiind de forma:

$$u_i = u_i^0 + k \quad i = 1, \dots, m \quad ; \quad v_j = v_j^0 - k \quad j = 1, \dots, n \quad (2.2.4)$$

unde k este un parametru iar $(u^0, v^0) = (u_1^0, \dots, u_m^0, v_1^0, \dots, v_n^0)$ este o soluție particulară a sistemului (2.2.3). Rezultă că valorile expresiilor:

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \quad (2.2.5)$$

nu depind de soluția (\bar{u}, \bar{v}) a sistemului (2.2.3), deoarece:

$$\Delta_{ij} = (u_i^0 + k) + (v_j^0 - k) - c_{ij} = u_i^0 + v_j^0 - c_{ij}$$

Din considerațiile de mai sus deducem următorul criteriu de recunoaștere a optimalității soluției \bar{x} :

Determinăm o soluție particulară (\bar{u}, \bar{v}) a sistemului (2.2.3) și calculăm $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ pentru toate cuplurile $(i,j) \notin I$ (pentru $(i,j) \in I$ este evident că $\Delta_{ij} = 0$)

Dacă toți Δ_{ij} calculați sunt ≤ 0 , atunci (\bar{u}, \bar{v}) este o soluție a dualei (Q) care împreună cu \bar{x} satisface condițiile de ecart complementar (2.2.2) și, în consecință, \bar{x} este o soluție optimă a PTE.

Exemplul 2.2.1 Vom testa optimalitatea soluției determinate în exemplul 2.1.1 prin metoda diferențelor maxime.

Sistemul $u_i + v_j = c_{ij} \ (i,j) \in I$

	v_1	v_2	v_3	v_4
u_1		5	9	1
u_2	10	7		
u_3				18

 \Rightarrow

	$u_1 + v_2 = 3$	$u_1 + v_3 = 1$	$u_1 + v_4 = 4$
$u_2 + v_1 = 3$	$u_2 + v_2 = 4$		
			$u_3 + v_4 = 2$

Tabelele 2.2.1 - 2.2.2

Determinăm o soluție particulară a acestui sistem luând $u_1 = 0$

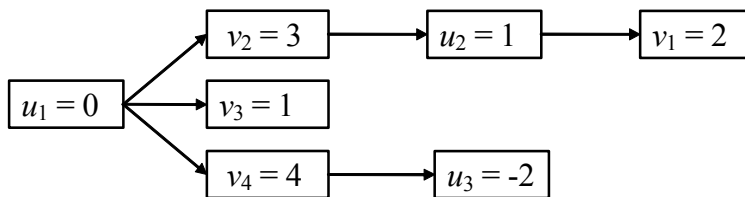


Figura 2.2.1

Este interesant de urmărit rezolvarea sistemului pe arborele asociat soluției \bar{x} :

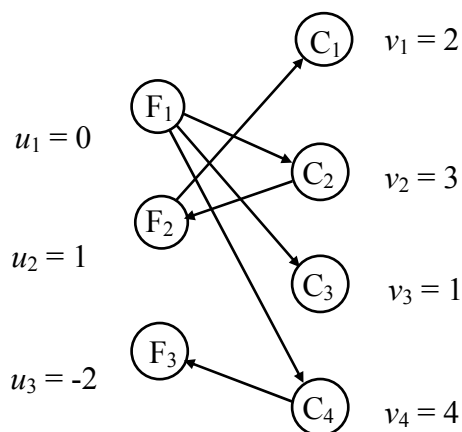


Fig. 2.2.2

Calculăm mărimile $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ numai pentru rutele "neocupate" adică pentru rutele $(i,j) \notin I$ (Pentru cele "ocupate", adică pentru rutele $(i,j) \in I$, știm că $\Delta_{ij} = 0$; în tabelul 2.2.3 aceste zerouri au fost înlocuite cu asteriscuri pentru a le deosebi de eventualele mărimi Δ_{ij} nule, asociate unor rute neocupate. Prezența unor asemenea mărimi în cazul în care soluția curentă este optimă arată că aceasta nu este unică! - vezi observația 6) din Cap. I, secțiunea 4.2 și secțiunea următoare 2.3 din care va rezulta că mărimile Δ_{ij} se identifică cu costurile reduse din programarea liniară generală.)

	$v_1 = 2$	$v_2 = 3$	$v_3 = 1$	$v_4 = 4$
$u_1 = 0$	-1	*	*	*
$u_2 = 1$	*	*	-1	-1
$u_3 = -2$	-4	-2	-7	*

Tabelul 2.2.3

Constatăm că soluția testată verifică criteriul de optimalitate.

2.3 Îmbunătățirea unei soluții de bază

Să presupunem că soluția \bar{x} considerată în secțiunea precedentă nu verifică testul de optimalitate; aceasta înseamnă că:

există o rută $(i_0, j_0) = (F_{i_0}, C_{j_0}) \notin I$ cu proprietatea $\Delta_{i_0 j_0} > 0$.

Vom construi o soluție admisibilă de bază \bar{x}' mai bună decât \bar{x} în sensul că \bar{x}' implică un cost total de transport mai mic.

Adăugăm muchia $\{F_{i_0}, C_{j_0}\}$ la arborele H corespunzător soluției \bar{x} . Conform unei proprietăți a arborilor se va forma un unic *ciclu*. Deoarece arborele H împreună cu muchia adăugată fac parte din graful asociat PTE care este *bipartit*, ciclul format are un număr *par* de muchii. Să parcurgem muchiile ciclului într-unul din cele două sensuri posibile, plecând de exemplu din nodul F_{i_0} :

$$F_{i_0} \rightarrow C_{j_0} \rightarrow F_{i_1} \rightarrow C_{j_1} \rightarrow \dots \rightarrow F_{i_p} \rightarrow C_{j_p} \rightarrow F_{i_0} \quad (2.3.1)$$

Fie $\theta > 0$. Construim o soluție variabilă $\tilde{x} = (\tilde{x}_{ij})$ a PTE punând:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{i_0 j_0} = \theta, \tilde{x}_{i_1 j_0} = \bar{x}_{i_1 j_0} - \theta, \tilde{x}_{i_1 j_1} = \bar{x}_{i_1 j_1} + \theta, \dots, \tilde{x}_{i_p j_p} = \bar{x}_{i_p j_p} + \theta, \tilde{x}_{i_0 j_p} = \bar{x}_{i_0 j_p} - \theta \\ \tilde{x}_{ij} = \bar{x}_{ij} \text{ in rest} \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Deoarece soluția \bar{x} este presupusă nedegenerată, pentru θ suficient de mic, (2.3.2) este o soluție admisibilă a PTE. Costul asociat soluției \tilde{x} va diferi de costul asociat soluției \bar{x} prin valoarea:

$$\begin{aligned} \Delta f = f(\tilde{x}) - f(\bar{x}) &= \theta(c_{i_0 j_0} - c_{i_1 j_0} + c_{i_1 j_1} - c_{i_2 j_1} + \dots + c_{i_p j_p} - c_{i_0 j_p}) = \\ &= \theta[c_{i_0 j_0} - (\bar{u}_{i_1} + \bar{v}_{j_0}) + (\bar{u}_{i_1} + \bar{v}_{j_1}) - (\bar{u}_{i_2} + \bar{v}_{j_1}) + \dots + (\bar{u}_{i_p} + \bar{v}_{j_p}) - (\bar{u}_{i_0} + \bar{v}_{j_p})] = \\ &= \theta(c_{i_0 j_0} - \bar{u}_{i_0} - \bar{v}_{j_0}) = -\theta \cdot \Delta_{i_0 j_0} < 0 \text{ de unde:} \end{aligned}$$

$$f(\tilde{x}) = f(\bar{x}) - \theta \Delta_{i_0 j_0} \quad (2.3.3)$$

Relația (2.3.3) arată că \tilde{x} implică un cost total de transport mai mic decât soluția curentă \bar{x} , diferența fiind cu atât mai mare cu cât θ sau $\Delta_{i_0 j_0}$ este mai mare.

Pentru a menține admisibilitatea soluției (2.3.2) este necesar ca:

$$\bar{x}_{i_1 j_0} - \theta \geq 0, \bar{x}_{i_2 j_1} - \theta \geq 0, \dots, \bar{x}_{i_0 j_p} - \theta \geq 0$$

de unde rezultă că θ nu poate depăși valoarea:

$$\theta_0 = \min\{\bar{x}_{i_1 j_0}, \bar{x}_{i_2 j_1}, \dots, \bar{x}_{i_0 j_p}\} = \bar{x}_{i_s j_{s-1}} \quad (2.3.4)$$

Luăm în (2.3.2) $\theta = \theta_0$ și notăm cu \bar{x}' soluția \tilde{x} corespunzătoare. Ea va avea cel mult $m + n - 1$ componente nenule; într-adevăr, în noua soluție $\bar{x}'_{i_0 j_0} = \theta_0 > 0$ iar în vechea soluție $\bar{x}_{i_0 j_0} = 0$. Pe de altă parte, componenta $\bar{x}'_{i_s j_{s-1}}$ corespunzătoare minimului din (2.3.4) este acum nulă în timp ce în vechea soluție \bar{x} era pozitivă. Noua soluție \bar{x}' este și o soluție de bază, deoarece ea corespunde arborelui H' obținut din $H \cup \{F_{i_0}, C_{j_0}\}$ îndepărtând muchia $\{F_{i_s}, C_{j_{s-1}}\}$.

Exemplul 2.3.1 Considerăm problema de transport echilibrată din exemplul 1.4.1 și soluția \bar{x} generată în exemplul 2.1.1 prin metoda colțului N-V. Aplicăm acestei soluții testul de optimalitate din secțiunea precedentă.

10	5		
	7	9	1
			18

$u_1 + v_1 = 3$	$u_1 + v_2 = 3$		
	$u_2 + v_2 = 4$	$u_2 + v_3 = 3$	$u_2 + v_4 = 6$
			$u_3 + v_4 = 2$

Tabelele 2.3.1 -2.3.2

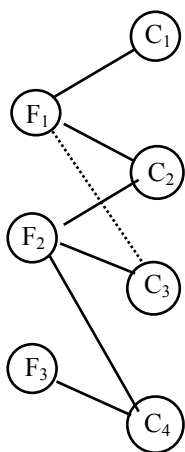
Determinăm o soluție particulară a sistemului luând de exemplu $u_2 = 0$, după care calculăm mărimile $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ pentru rutele "neocupate":

	$v_1 = 4$	$v_2 = 4$	$v_3 = 3$	$v_4 = 6$
$u_1 = -1$	*	*	1	1
$u_2 = 0$	1	*	*	*
$u_3 = -4$	-4	-3	-7	*

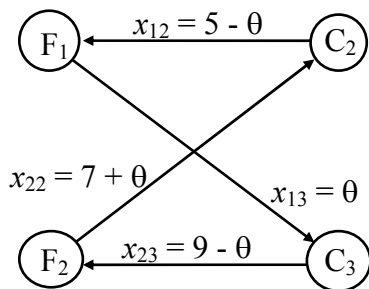
Rutele "ocupate au fost marcate cu asteriscuri!"

Tabelul 2.3.3

Deoarece există și mărimi Δ_{ij} pozitive, soluția testată nu este optimă. Considerăm ruta neocupată (F_1, C_3) în care $\Delta_{13} = 1 > 0$. Adăugăm la arborele H al soluției \bar{x} muchia $\{F_1, C_3\}$:



Rezultă ciclul:



Pe muchiile ciclului au fost puse în evidență componentele din soluția variabilă \tilde{x} care depind de parametrul $\theta > 0$.

Acest ciclu se poate pune în evidență și în tabelul 2.3.1 al soluției \bar{x} printr-un *contur poligonal* care începe din celula (1,3) și "cotește" în unghi drept prin celulele ocupate (2,3), (2,2), (1,2) - vezi tabelul 2.3.4.

10	5 - θ \ominus	\oplus θ	
	7 + θ \oplus	\ominus 9 - θ	1
			18

Tabelul 2.3.4

Conturul va avea un număr *par* de "colțuri" deoarece acestea corespund muchiilor ciclului.

În tabelul 2.3.4 apare în fapt soluția variabilă \tilde{x} definită în (2.3.2). Costul asociat al transportului, calculat cu relația (2.3.3) are valoarea:

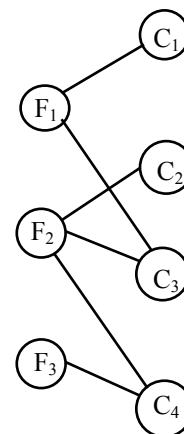
$$f(\tilde{x}) = f(\bar{x}) - \theta \Delta_{13} = 143 - 1 \cdot \theta$$

Pentru determinarea comodă a lui θ_0 din (2.3.4) putem proceda astfel: *marcăm* succesiv colțurile conturului poligonal cu + și - începând cu + în celula (1,3). Atunci θ_0 este exact *minimumul* componentelor soluției \bar{x} care sunt situate în celulele marcate cu - : $\theta_0 = \bar{x}_{12} = 5$. Noua soluție \bar{x}' apare în tabelul (2.3.5):

10		5	
	12	4	1
			18

Tabelul 2.3.5

și corespunde arborelui H dedus din $H \cup \{F_1, C_3\}$ eliminând muchia $\{F_1, C_2\}$:



Invităm cititorul să repete calculele făcute în acest exemplu plecând de la soluția din tabelul 2.3.5.

2.4 Algoritm de rezolvare a PTE. Convergență

Ca și până acum ne vom referi la problema de transport echilibrată (PTE) al cărei model matematic a fost prezentat în secțiunea 1.2 și vom presupune în continuare că *toate* soluțiile sale de bază sunt *nedegenerate*. Dezvoltările teoretice din secțiunile precedente ca și exemplele ilustrative conduc la următorul algoritm de rezolvare a PTE.

Inițializare. Se determină printr-o metodă oarecare (vezi secțiunea 2.1) o soluție admisibilă de bază de start $\bar{x} = (\bar{x}_{ij})$.

Conținutul unei iterații. 1) Se asociază furnizorilor variabilele u_1, u_2, \dots, u_m și consumatorilor variabilele v_1, v_2, \dots, v_n . Asociem fiecărei rute ocupate (i, j) - aceasta însemnând $\bar{x}_{ij} > 0$ - o ecuație de forma $u_i + v_j = c_{ij}$. Se determină o soluție particulară (\bar{u}, \bar{v}) a sistemului format. Pentru aceasta se acordă o valoare particulară (întotdeauna *zero*) uneia dintre variabile (de regulă, *cele care apare de cele mai multe ori*); valorile celorlalte variabile se determină apoi *în mod unic*. Se calculează mărimile $\Delta_{ij} = \bar{u}_i + \bar{v}_j - c_{ij}$ pentru toate rutele *neocupate* (adică acolo unde $\bar{x}_{ij} = 0$).

2) (*Test de optimalitate*) Dacă toți $\Delta_{ij} \leq 0$ soluția curentă \bar{x} este *optimă*. În caz contrar:

3) Se identifică ruta (i_0, j_0) cu *cel mai mare* Δ_{i_0, j_0} *pozitiv*. În tabelul soluției \bar{x} se identifică *unicul contur poligonal* care începe și sfârșește în celula (i_0, j_0) și cotește în unghi drept numai prin celule ocupate (acest contur corespunde *ciclului* format în arborele H asociat soluției \bar{x} , după adăugarea muchiei $\{F_{i_0}, C_{j_0}\}$!). Se marchează alternativ cu + și - colțurile ciclului. Se calculează θ_0 ca fiind *minimul* componentelor \bar{x}_{ij} aflate în celulele marcate cu -

4) (*Construcția unei noi soluții*) Se adună θ_0 la valorile \bar{x}_{ij} aflate în celulele marcate cu + și se scade același θ_0 din valorile \bar{x}_{ij} înscrise în celulele marcate cu -. Valorile \bar{x}_{ij} aflate în celulele nemarcate cu + sau - nu se modifică. Costul asociat soluției \bar{x}' rezultate are valoarea:

$$f(\bar{x}') = f(\bar{x}) - \theta_0 \cdot \Delta_{i_0, j_0} \quad (2.4.1)$$

Se revine la pasul 1) în cadrul unei noi iterații.

În ceea ce privește convergența algoritmului, *dacă toate soluțiile de bază ale PTE sunt nedegenerate, algoritmul descris se termină într-un număr finit de iterații cu determinarea unei soluții optime.*

Într-adevăr, formula (2.4.1) arată că la fiecare iterație valoarea funcției obiectiv descreește semnificativ. Cum numărul soluțiilor de bază admisibile este finit, algoritmul se oprește obligatoriu într-un număr finit de pași, ultima soluție testată fiind optimă. (Cititorul atent va observa desigur că afirmația precedentă și justificarea ei constituie în fapt o simplă reluare a teoremei de convergență 4.5.1 din cap. I și a demonstrației acesteia!)

2.5 Degenerare

Algoritmul de rezolvare a PTE și convergența acestuia au fost prezentate în ipoteza că toate soluțiile admisibile de bază ale problemei sunt nedegenerate. Șansa ca o problemă de transport să aibe soluții degenerate este însă foarte mare și în plus nu avem nici un criteriu pe baza căruia să recunoaștem în prealabil existența acestor soluții. Este important să observăm că:

dacă în rezolvarea unei PTE am pornit cu o soluție nedegenerată și apoi toate soluțiile construite au fost deasemeni nedegenerate, procesul iterativ este necesarmente finit.

În virtutea acestei observații, va fi important să știm cum procedăm dacă soluția de start este degenerată sau dacă degenerarea apare pe parcursul aplicării algoritmului. În principiu, evitarea degenerării se face prin “ușoara” *perturbare* a unora din datele problemei de așa manieră încât noua problemă să aibe numai soluții de bază nedegenerate! Soluțiile celor două probleme vor diferi “cu puțin” unele de altele astfel că, după rezolvarea problemei perturbate prin “revenire” la problema inițială se obține soluția optimă a acesteia din urmă. Am considerat că este mai simplu și mai bine să explicăm *tehnica de perturbare* pe câteva exemple particulare; în orice altă situație similară se va proceda absolut analog.

Exemplul 2.5.1 Considerăm problema de transport echilibrată definită de datele din tabelul 2.5.1:

	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	Disponibil
F ₁	4	2	5	4	100
F ₂	6	7	3	8	100
F ₃	3	5	4	5	100
Necesar	110	90	50	50	300

Tabelul 2.5.1

În tabelul 2.5.2 este dată soluția generată prin metoda diferențelor maxime:

10 ⁽⁴⁾	90 ⁽¹⁾		
		50 ⁽²⁾	50 ⁽⁵⁾
100 ⁽³⁾			

Tabelul 2.5.2

Soluția este *degenerată* deoarece are $5 < 6 = 3 + 4 - 1$ componente nenule. Această situație se datorează faptului că la alocarea a 4-a disponibilul curent al furnizorului F₁ a fost egal cu necesarul curent al consumatorului C₁ (=10) și ca urmare, după efectuarea alocării, atât rândul 1 cât și coloana 1 au fost blocate!

Pentru a obține o soluție nedegenerată *perturbăm puțin* datele problemei originale în următorul mod. Fie $\varepsilon > 0$ un număr foarte mic.

- Mărim cu ε necesarul consumatorului C_1 acesta devenind $b_1=110+\varepsilon$.
- pentru reechilibrarea problemei mărim cu același ε disponibilul unui furnizor *activ* (adică cu disponibilul curent nenul) *altul* decât F_1 ; de exemplu modificăm disponibilul lui F_2 : $a_2 = 100 + \varepsilon$.

Reluăm alocarea a 4-a:

$$x_{11} = \min(10 + \varepsilon, 10) = 10$$

Actualizăm:

$$b_1 \leftarrow \varepsilon \quad a_1 \leftarrow 0$$

Continuând aplicarea metodei diferențelor maxime, rezultă în final soluția nedegenerată:

10 ⁽⁴⁾	90 ⁽¹⁾		
ε ⁽⁵⁾		50 ⁽²⁾	50 ⁽⁶⁾
100 ⁽³⁾			

Tabelul 2.5.3

dar, pentru problema *perturbată*!!

Aplicăm acestei soluții algoritmul de rezolvare a PTE:

	$v_1 = 0$	$v_2 = -2$	$v_3 = -3$	$v_4 = 2$	
$u_1 = 4$	*	*	-4	2	⇒
$u_2 = 6$	*	-3	*	*	
$u_3 = 3$	*	-4	-4	0	

⊖	10	90		⊕
⊕	ε		50	⊖
	100		50	

Tabelele 2.5.4 - 2.5.5

“Redistribuim” în colțurile ciclului
valoarea:

$$\theta_0 = \min \{x_{11} = 10, x_{24} = 50\} = 10 \Rightarrow$$

Obținem soluția:

	90		10
10 + ε		50	40
100			

Tabelul 2.5.6

Pentru $\varepsilon = 0$ se găsește o soluție nedegenerată a problemei originale căreia îi aplicăm, în continuare algoritmul:

	$v_1=6$	$v_2=6$	$v_3=3$	$v_4=8$	
$u_1 = -4$		90		10	
$u_2 = 0$	10		50	40	\Rightarrow
$u_3 = -3$	100				

-2	*	-6	*
*	-1	*	*
*	-2	-4	0

Tabelele 2.5.7 - 2.5.8

Noua soluție, notată \bar{x} , este optimă. Deoarece $\Delta_{34} = 0$, problema mai are o soluție optimă de bază \bar{x}' care se obține folosind conturul poligonal asociat în tabelul 2.5.7 celulei (3,4):

	90		10
50		50	
60			40

Tabelul 2.5.9

În acord cu teoria generală a programării liniare, problema dată va avea o infinitate de soluții optime de forma:

$$x = \alpha \bar{x} + \beta \bar{x}'$$

$$\text{unde } \alpha + \beta = 1$$

$$\alpha \geq 0, \beta \geq 0$$

	90		10
$10\alpha + 50\beta$		50	40α
$100\alpha + 60\beta$			40β

Tabelul 2.5.10

Exempul 2.5.2 Să rezolvăm acum problema:

	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	Disponibil
F ₁	4	2	5	4	110
F ₂	6	7	3	8	80
F ₃	3	5	4	5	90
Necesar	120	90	50	20	280

Tabelul 2.5.11

pornind de la soluția de bază nedegenerată din tabelul 2.5.12, determinată prin metoda diferențelor maxime.

20 ⁽⁴⁾ ⊖	90 ⁽¹⁾			⊕
10 ⁽⁵⁾ ⊕		50 ⁽²⁾	20 ⁽⁶⁾ ⊖	
90 ⁽³⁾				

Tabelul 2.5.12

	90		20
30		50	
90			

Tabelul 2.5.13

Propunem cititorului să verifice că această soluție nu este optimă și că $\Delta_{14} = 2 > 0$. În tabelul 2.5.12 este indicat și conturul poligonal asociat rutei (1,4). Marcând succesiv colțurile conturului cu + și - se constată că minimumul θ_0 al valorilor numerice din celulele marcate cu - nu este unic: $\theta_0 = x_{11} = x_{24} = 20$.

Aceasta face ca noua soluție, indicată în tabelul 2.5.13, să fie degenerată. Pentru a evita degenerarea, modificăm puțin valoarea uneia din variabilele x_{11} sau x_{24} ; luăm de exemplu: $x_{11} = 20 + \varepsilon$, ceea ce înseamnă să considerăm $a_1 = 110 + \varepsilon$ și $b_1 = 120 + \varepsilon$. De această dată minimumul $\theta_0 = x_{24} = 20$ este unic, astfel că după “redistribuirea” sa în colțurile conturului poligonal indicat se obține soluția nedegenerată din tabelul 2.5.14:

ε	90		20
30		50	
90			

Tabelul 2.5.14

	$v_1 = 0$	$v_2 = -2$	$v_3 = -3$	$v_4 = 0$
$u_1 = 4$	*	*	-4	*
$u_2 = 6$	*	-3	*	-2
$u_3 = 3$	*	-4	-4	-2

Tabelul 2.5.15

dar, a problemei modificate! Din tabelul alăturat 2.5.15 rezultă că soluția construită este optimă. Luând $\varepsilon = 0$ obținem soluția optimă a problemei inițiale care este deja afișată în tabelul 2.5.13.