Parametrizare

Sunt cazuri în care coeficienții unei probleme nu sunt cunoscuți, sau nu pot fi estimați cu exactitate, sau nu sunt constanți, ei variind în funcție de unul sau mai mulți parametrii, după o lege cunoscută, care este mai mult sau mai puțin complicată, putând lua valori într-o mulțime oarecare, finită sau infinită, discretă sau continuă, mărginită sau nemărginită. Ne-ar interesa să cunoaştem, pentru fiecare valoare posibilă a coeficienților, care este soluția optimă a problemei, sau invers, pentru fiecare soluție, care este mulțimea parametrilor pentru care aceasta rămâne optimă.

Este evident că problema este atât de complicată încât nu se poate da o unică rezolvare, aplicabilă pentru orice mulțime a parametrilor şi oricare ar fi legile de dependență a coeficienților de parametrii.

Ne propunem să facem rezolvarea doar pentru cazurile în care *termenii liberi* ai restricțiilor sau *coeficienții funcției obiectiv* variază *liniar* în funcție de *un singur* parametru.

Cazul 1 Parametrizarea termenilor liberi ai restricțiilor

Aşadar termenii liberi ai restricțiilor au forma:

$$b(\lambda) = b^0 + b^1\cdot\lambda \iff b_i(\lambda) = b_i^0 + b_i^1 \cdot \lambda \quad i = \overline{1,m}$$

unde $\lambda \in R$ este parametrul considerat iar $b^0, b^1 \in R^m$ sunt doi vectori cu componentele constante reale. Pentru rezolvarea problemei pentru orice λ, vom parcurge următorii paşi:

Pasul 1. Se rezolvă problema pentru un λ_0 inițial; presupunem că există cel puțin un λ pentru care problema are soluție (altfel am avea un caz neinteresant) şi în plus putem presupune că el este egal chiar cu 0, acest lucru putând fi aranjat eventual prin schimbarea de variabilă:

$$\lambda = \lambda_0 + \mu$$

şi scrierea lui b sub forma:

$$b(\mu) = (b^0 + b^1\cdot\lambda_0) + b^1\cdot\mu.$$

Vom găsi o soluție x_0 şi baza corespunzătoare B_0.

Pasul 2. Se calculează soluțiile de bază $x_B(\lambda)$, corespunzătoare bazei găsite la pasul 1, pentru λ variabil:

$$x_B(\lambda) = B_0^{-1} \cdot b(\lambda)$$

Deoarece valorile $\Delta_j = c_B^T \cdot B^{-1} \cdot a_j - c_j$ nu depind de λ, ele sunt pozitive pentru orice λ, nu doar pentru λ_0 şi deci soluția $x_B(\lambda)$ va fi optimă atâta timp cât are toate componentele pozitive. Acei λ pentru care $x_B(\lambda) \geq 0$ reprezintă mulțimea valorilor parametrului pentru care baza B_0 dă soluția optimă.

Pasul 3. Se rezolvă sistemul de inecuații $x_B(\lambda) \geq 0$, a cărui soluție va fi, ținând cont că toate inecuațiile sunt liniare, un interval $\left[\underline{\lambda_0}, \overline{\lambda^0}\right]$, unde $\underline{\lambda_0}$ poate fi şi $-\infty$ iar $\overline{\lambda^0}$ poate fi şi $+\infty$ (în general, pentru orice bază, mulțimea pe care soluția este pozitivă are această formă şi deci şi mulțimea pe care nu există nici o bază cu soluţia pozitivă va fi o reuniune de astfel de intervale, însă deschise şi, cum există un număr finit de baze, mulţimea numerelor reale va fi împărţită într-un număr finit de intervale, ca mai sus, pentru fiecare corespunzând o bază optimă sau nici una. Se poate demonstra că intervalele pe care nu există soluţie sunt neapărat de forma $(-\infty,a)$ sau $(a,+\infty)$). Deoarece B^{-1} este inversabilă, cel puţin unul dintre $\underline{\lambda}_0$ şi $\overline{\lambda}^0$ este finit. Fie $\overline{\lambda}^0$ acesta.

Pentru $\lambda > \overline{\lambda}^0$, cel puţin una din componentele soluţiei de bază corespunzătoare bazei B_0 va fi strict negativă. Este clar că, pentru $\lambda > \overline{\lambda}^0$, trebuie căutată altă bază optimă, dacă aceasta există.

Pasul 4. Reluăm algoritmul, pentru o valoare a lui λ aflată în imediata vecinătate a lui $\overline{\lambda}^0$ şi $\lambda > \overline{\lambda}^0$, astfel încât să ne situăm în intervalul imediat următor intervalului $\left[\underline{\lambda}_0, \overline{\lambda}^0\right]$. Pentru găsirea bazei corespunzătoare acestuia (sau pentru aflarea faptului că nu există nici o soluţie pentru $\lambda > \overline{\lambda}^0$) se aplică în continuare algoritmul simplex dual (deoarece toţi $\Delta_j \geq 0$).

Se obţine o succesiune de valori $\overline{\lambda}^0 < \overline{\lambda}^1 < \overline{\lambda}^2 < \ldots < \overline{\lambda}^k = +\infty$ şi o succesiune de baze şi soluţii optime asociate fiecărui interval.

Pasul 5. Reluăm algoritmul pentru o valoare a lui λ aflată în imediata vecinătate a lui $\underline{\lambda}_0$ şi $\lambda < \underline{\lambda}_0$, astfel încât să ne situăm în intervalul imediat anterior lui $\left[\underline{\lambda}_0, \overline{\lambda}^0\right]$. Pentru găsirea bazei corespunzătoare acestuia (sau pentru aflarea faptului că nu există nici o soluţie pentru $\lambda < \underline{\lambda}_0$) se aplică în continuare algoritmul simplex dual (deoarece toţi $\Delta_j \geq 0$).

Se obţine o succesiune de valori $\underline{\lambda}_0 > \underline{\lambda}_1 > \underline{\lambda}_2 > \ldots > \underline{\lambda}_l = -\infty$ şi o succesiune de baze şi soluţii optime asociate fiecărui interval.

În acest moment, cunoaştem, pentru fiecare valoare posibilă a parametrului λ, soluţia optimă a problemei sau invers, pentru fiecare bază, care este mulţimea parametrilor pentru care aceasta este optimă şi algoritmul este terminat.

Exemplu O întreprindere are gama sortimentală formată din 6 produse $\{P_j \,/\, j = \overline{1,6}\}$ pentru fabricarea cărora foloseşte 3 materii prime $\{M_i \,/\, i = \overline{1,3}\}$. Se cunosc:

a) disponibilurile din fiecare materie primă $\{b_i(\lambda) \,/\, i = \overline{1,3}\}$, care sunt dependente liniar de un parametru λ.
b) profiturile/1000 unităţi vândute din fiecare produs $\{c_j \,/\, j = \overline{1,6}\}$.
c) coeficienţii tehnologici $\{a_{i,j} \,/\, i = \overline{1,3};\ j = \overline{1,6}\}$ ($a_{i,j}$ = cantitatea din materia primă i necesară fabricării a 1000 produse de tipul j)

toate date în tabelul de mai jos:

produse / mat. prime	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	Disponibil
M_1	3	5	7	2	1	2	$20 + 3\lambda$
M_2	5	6	9	3	4	5	$40 + 2\lambda$
M_3	7	8	10	3	2	8	$60 + \lambda$
profit/1000 prod.	2	3	4	1	1	2	

Se doreşte găsirea acelor cantităţi $\{x_j \,/\, j = \overline{1,6}\}$ ce trebuie fabricate din fiecare produs, astfel încât să se obţină profitul total maxim.

Rezolvare Avem de rezolvat o problemă de parametrizare a termenului liber, deci vom aplica algoritmul de mai sus.

Se scrie problema de programare asociată şi se aduce la forma standard:

		F.S.
max $(2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 + 2x_6)$		max $(2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 + 2x_6)$
$\begin{cases} 3x_1+5x_2+7x_3+2x_4+x_5+2x_6 \le 20+3\lambda \\ 5x_1+6x_2+9x_3+3x_4+4x_5+5x_6 \le 40+2\lambda \\ 7x_1+8x_2+10x_3+3x_4+2x_5+8x_6 \le 60+\lambda \end{cases}$	$\Leftrightarrow$	$\begin{cases} 3x_1+5x_2+7x_3+2x_4+x_5+2x_6+s_1 = 20+3\lambda \\ 5x_1+6x_2+9x_3+3x_4+4x_5+5x_6+s_2 = 40+2\lambda \\ 7x_1+8x_2+10x_3+3x_4+2x_5+8x_6+s_3 = 60+\lambda \end{cases}$
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0$		$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0$

Pasul 1. Rezolvăm problema pentru $\lambda = 0$ şi obţinem baza optimă:

$$B = (a_5,a_6,a_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

soluţia optimă $x_B = \left(\frac{10}{31}, \frac{180}{31}, \frac{50}{31}\right)$, inversa bazei $B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{31} & \frac{12}{31} & -\frac{13}{62} \\ -\frac{10}{31} & -\frac{1}{31} & \frac{7}{31} \\ \frac{11}{31} & -\frac{2}{31} & -\frac{3}{62} \end{pmatrix}$ şi ultimul tabel simplex:

			2	3	4	1	1	2	0	0	0
c_B	x_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	s_1	s_2	s_3
1	x_5	$\frac{10}{31}$	$\frac{5}{62}$	0	$\frac{15}{31}$	$\frac{17}{62}$	1	0	$-\frac{4}{31}$	$\frac{12}{31}$	$-\frac{13}{62}$
2	x_6	$\frac{180}{31}$	$\frac{14}{31}$	0	$-\frac{9}{31}$	$-\frac{2}{31}$	0	1	$-\frac{10}{31}$	$-\frac{1}{31}$	$\frac{7}{31}$
3	x_2	$\frac{50}{31}$	$\frac{25}{62}$	1	$\frac{44}{31}$	$\frac{23}{62}$	0	0	$\frac{11}{31}$	$-\frac{2}{31}$	$-\frac{3}{62}$
		$\frac{520}{31}$	$\frac{6}{31}$	0	$\frac{5}{31}$	$\frac{8}{31}$	0	0	$\frac{9}{31}$	$\frac{4}{31}$	$\frac{3}{31}$

Pasul 2. Se calculează soluţia de bază corespunzătoare bazei optime pentru λ oarecare:

$$x_B(\lambda) = B^{-1}\cdot b(\lambda) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{31} & \frac{12}{31} & -\frac{13}{62} \\ -\frac{10}{31} & -\frac{1}{31} & \frac{7}{31} \\ \frac{11}{31} & -\frac{2}{31} & -\frac{3}{62} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20+3\lambda \\ 40+2\lambda \\ 60+\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{31}+\frac{11}{62}\lambda \\ \frac{180}{31}-\frac{25}{31}\lambda \\ \frac{50}{31}+\frac{55}{62}\lambda \end{pmatrix}$$

Pasul 3. Se rezolvă sistemul de inecuaţii $x_B \ge 0$:

$$x_B \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{10}{31}+\frac{11}{62}\lambda \ge 0 \\ \frac{180}{31}-\frac{25}{31}\lambda \ge 0 \\ \frac{50}{31}+\frac{55}{62}\lambda \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda \in \left[-\frac{20}{11}, \frac{36}{5}\right] \Rightarrow \underline{\lambda_0} = -\frac{20}{11} \text{ şi } \overline{\lambda^0} = \frac{36}{5}$$

Pasul 4. Se observă că pentru λ aflat în imediata vecinătate a lui $\overline{\lambda^0}$ şi $\lambda > \overline{\lambda^0}$ vom avea o singură variabilă negativă şi anume x_6. Pentru un astfel de λ, soluția corespunzătoare bazei B este dual admisibilă şi, aplicând algoritmul simplex dual, aceasta va fi scoasă din bază şi înlocuită cu x_3. Se obțin:

– noua bază $B = (a_5, a_3, a_2) = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 4 & 9 & 6 \\ 2 & 10 & 8 \end{pmatrix}$ şi $B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{31} & \frac{12}{31} & -\frac{13}{62} \\ -\frac{10}{31} & -\frac{1}{31} & \frac{7}{31} \\ \frac{11}{31} & -\frac{2}{31} & -\frac{3}{62} \end{pmatrix}$

– noua soluție:

$$x_B(\lambda) = B^{-1} \cdot b(\lambda) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{31} & \frac{12}{31} & -\frac{13}{62} \\ -\frac{10}{31} & -\frac{1}{31} & \frac{7}{31} \\ \frac{11}{31} & -\frac{2}{31} & -\frac{3}{62} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20+3\lambda \\ 40+2\lambda \\ 60+\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10-\frac{7}{6}\lambda \\ -20+\frac{25}{9}\lambda \\ 30-\frac{55}{18}\lambda \end{pmatrix}$$

– noul tabel simplex corespunzător noii baze:

			2	3	4	1	1	2	0	0	0
c_B	x_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	s_1	s_2	s_3
1	x_5	$10-\frac{7}{6}\lambda$	$\frac{5}{6}$	0	0	$\frac{1}{6}$	1	$\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
4	x_3	$-20+\frac{25}{9}\lambda$	$-\frac{14}{9}$	0	1	$\frac{2}{9}$	0	$-\frac{31}{9}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{7}{9}$
3	x_2	$30-\frac{55}{18}\lambda$	$\frac{47}{18}$	1	0	$\frac{1}{18}$	0	$\frac{44}{9}$	$-\frac{11}{9}$	$-\frac{2}{9}$	$\frac{19}{18}$
		$20+\frac{7}{9}\lambda$	$\frac{4}{9}$	0	0	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$

– noul interval pe care este optimă noua bază:

$$\begin{cases} 10-\frac{7}{6}\lambda \geq 0 \\ -20+\frac{25}{9}\lambda \geq 0 \\ 30-\frac{55}{18}\lambda \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda \in \left[\frac{36}{5}, \frac{60}{7}\right] \Rightarrow \overline{\lambda^0} = \frac{36}{5} \text{ şi } \overline{\lambda^1} = \frac{60}{7}$$

Reluând algoritmul vom obține succesiv intervalele şi soluțiile următoare:

1. $\lambda \in \left[\frac{60}{7}, \frac{140}{11}\right]$ $B = (a_7, a_3, a_2)$ $x_B = \begin{pmatrix} -15+\frac{7}{4}\lambda \\ -\frac{10}{3}+\frac{5}{6}\lambda \\ \frac{35}{3}-\frac{11}{12}\lambda \end{pmatrix}$

2. $\lambda \in \left[\frac{140}{11},+\infty\right)$ B = (a_7, a_3, a_5) $x_B = \begin{pmatrix} -\frac{270}{11}+\frac{5}{2}\lambda \\ \frac{80}{11} \\ -\frac{70}{11}+\frac{1}{2}\lambda \end{pmatrix}$

Pasul 5. Începând înapoi de la $\underline{\lambda_0} = -\frac{20}{11}$ obținem:

1. $\lambda \in \left[-4,-\frac{20}{11}\right]$ B = (a_5, a_6, a_9) $x_B = \begin{pmatrix} -\frac{20}{3}-\frac{11}{3}\lambda \\ \frac{40}{3}+\frac{10}{3}\lambda \\ -\frac{100}{3}-\frac{55}{3}\lambda \end{pmatrix}$

2. $\lambda \in \left[-\frac{20}{3},-4\right]$ B = (a_5, a_8, a_9) $x_B = \begin{pmatrix} 20+3\lambda \\ -40-10\lambda \\ 20-5\lambda \end{pmatrix}$

3. $\lambda \in \left[-\infty,-\frac{20}{3}\right]$ - sistemul nu are soluții admisibile.

La marginile intervalelor problema va avea cel puțin două soluții de bază şi, deci, o infinitate de soluții optime (toate combinațiile convexe dintre acestea).

În concluzie, dacă:

- $\lambda \in \left(-\infty,-\frac{20}{3}\right)$ disponibilul din M_1 ar fi negativ, caz fără sens economic.
- $\lambda \in \left[-\frac{20}{3},-4\right]$ întreprinderea va fabrica doar produse de tipul P_5
- $\lambda \in \left[-4,-\frac{20}{11}\right]$ întreprinderea va fabrica doar produse de tipul P_5 şi P_6
- $\lambda \in \left[-\frac{20}{11},\frac{36}{5}\right]$ întreprinderea va fabrica doar produse de tipul P_5, P_6 şi P_2
- $\lambda \in \left[\frac{36}{5},\frac{60}{7}\right]$ întreprinderea va fabrica doar produse de tipul P_5, P_3 şi P_2
- $\lambda \in \left[\frac{60}{7},\frac{140}{11}\right]$ întreprinderea va fabrica doar produse de tipul P_3 şi P_2
- $\lambda \in \left[\frac{140}{11},+\infty\right)$ întreprinderea va fabrica doar produse de tipul P_3 şi P_5

Cazul 2 Parametrizarea coeficienţilor funcţiei obiectiv

Aşadar, coeficienţii funcţiei obiectiv au forma:

$$c(\lambda) = c^0 + c^1\cdot\lambda \;\Leftrightarrow\; c_j(\lambda) = c_j^0 + c_j^1 \cdot \lambda \quad j = \overline{1,n}$$

unde $\lambda \in R$ este parametrul considerat iar c^0, $c^1 \in R^n$ sunt doi vectori cu componentele constante reale. Pentru rezolvarea problemei pentru orice λ, vom parcurge următorii paşi:

Pasul1. Se rezolvă problema pentru un λ_0 iniţial; presupunem că există cel puţin un λ pentru care problema are soluţie (altfel am avea un caz neinteresant) şi în plus putem presupune că el este egal chiar cu 0, acest lucru putând fi aranjat eventual prin schimbarea de variabilă:

$$\lambda = \lambda_0 + \mu$$

şi scrierea lui b sub forma:

$$c(\mu) = (c^0 + c^1\cdot\lambda_0) + c^1\cdot\mu.$$

Vom găsi o soluţie x_0 şi baza corespunzătoare B_0.

Pasul2. Se calculează $\Delta_j(\lambda)$ corespunzători bazei găsite la pasul 1, pentru λ variabil:

$$\Delta_j(\lambda) = c_B^T(\lambda)\cdot B_0^{-1} \cdot A - c(\lambda)$$

Deoarece componentele soluţiei de bază corespunzătoare $x_B = B_o^{-1} \cdot b$ nu depind de λ, ele sunt pozitive pentru orice λ, nu doar pentru λ_0 şi soluţia x_B va fi optimă atâta timp cât toţi $\Delta_j(\lambda) \geq 0$. Acei λ pentru care $\Delta_j(\lambda) \geq 0$ reprezintă mulţimea valorilor parametrului pentru care baza B_0 dă soluţia optimă.

Pasul3. Se rezolvă sistemul de inecuaţii $\Delta_j(\lambda) \geq 0$, a cărui soluţie va fi, ţinând cont că toate inecuaţiile sunt liniare, un interval $\left[\underline{\lambda_0}, \overline{\lambda^0}\right]$, unde $\underline{\lambda_0}$ poate fi şi $-\infty$ iar $\overline{\lambda^0}$ poate fi şi $+\infty$ (în general, pentru orice bază, mulţimea pe care $\Delta_j(\lambda) \geq 0$ are această formă şi, deci, şi mulţimea pe care nu există soluţie optimă va fi o reuniune de astfel de intervale, însă deschise şi, cum există un număr finit de baze, mulţimea numerelor reale va fi împărţită într-un număr finit de intervale, pentru fiecare corespunzând o bază optimă sau nici una. Se poate demonstra că intervalele pe care nu există soluţie optimă sunt neapărat de forma $(-\infty,a)$ sau $(a,+\infty)$). Deoarece B^{-1} este inversabilă, cel puţin unul dintre $\underline{\lambda_0}$ şi $\overline{\lambda^0}$ este finit. Fie $\overline{\lambda^0}$ acesta.

Pentru $\lambda > \overline{\lambda^0}$ cel puţin unul dintre $\Delta_j(\lambda)$ corespunzători bazei B_0 va fi strict negativ. Este clar că pentru $\lambda > \overline{\lambda^0}$ trebuie căutată altă bază optimă, dacă aceasta există.

Pasul4. Reluăm algoritmul pentru o valoare a lui λ aflată în imediata vecinătate a lui $\overline{\lambda^0}$ şi $\lambda > \overline{\lambda^0}$, astfel încât să ne situăm în intervalul imediat următor intervalului $\left[\underline{\lambda_0}, \overline{\lambda^0}\right]$. Pentru găsirea bazei corespunzătoare acestuia (sau pentru aflarea faptului că nu există nici o soluţie optimă pentru $\lambda > \overline{\lambda^0}$) se aplică în continuare algoritmul simplex primal (deoarece $x_B \geq 0$).

Se obține o succesiune de valori $\overline{\lambda^0} < \overline{\lambda^1} < \overline{\lambda^2} < \ldots < \overline{\lambda^k} = +\infty$ şi o succesiune de baze şi soluții optime asociate fiecărui interval.

Pasul5. Reluăm algoritmul pentru o valoare a lui λ aflată în imediata vecinătate a lui $\underline{\lambda_0}$ şi $\lambda < \underline{\lambda_0}$, astfel încât să ne situăm în intervalul imediat anterior lui $\left[\underline{\lambda_0}, \overline{\lambda^0}\right]$. Pentru găsirea bazei corespunzătoare acestuia (sau pentru aflarea faptului că nu există nici o soluție optimă pentru $\lambda < \underline{\lambda_0}$) se aplică în continuare algoritmul simplex primal (deoarece $x_B \geq 0$).

Se obține o succesiune de valori $\underline{\lambda_0} > \underline{\lambda_1} > \underline{\lambda_2} > \ldots > \underline{\lambda_l} = -\infty$ şi o succesiune de baze şi soluții optime asociate fiecărui interval.

În acest moment, cunoaştem, pentru fiecare valoare posibilă a parametrului λ, soluția optimă a problemei sau invers, pentru fiecare bază, care este mulțimea parametrilor pentru care aceasta este optimă şi algoritmul este terminat.

Exemplu Analizăm cazul aceleiaşi întreprinderi în cazul în care disponibilul din fiecare materie primă rămâne constant dar profiturile variază în funcție de un parametru μ, acestea fiind date în tabelul de mai jos:

produse / mat. prime	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	Disponibil
M_1	3	5	7	2	1	2	20
M_2	5	6	9	3	4	5	40
M_3	7	8	10	3	2	8	60
profit/1000 prod.	$2 + 4\mu$	$3 + 3\mu$	$4 + 2\mu$	$1 + 4\mu$	$1 + 2\mu$	$2 + 3\mu$	

Rezolvare. Avem de rezolvat o problemă de parametrizare a coeficienților funcției obiectiv, deci vom aplica algoritmul de mai sus.

Se scrie problema de programare asociată şi se aduce la forma standard:

		F.S.
$\max [(2+4\mu)x_1 + (3+3\mu)x_2 + (4+2\mu)x_3 + (1+4\mu)x_4 + (1+2\mu)x_5 + (2+3\mu)x_6]$ $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6 \leq 20 \\ 5x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 5x_6 \leq 40 \\ 7x_1 + 8x_2 + 10x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 8x_6 \leq 60 \end{cases}$ $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$	$\Leftrightarrow$	$\max [(2+4\mu)x_1 + (3+3\mu)x_2 + (4+2\mu)x_3 + (1+4\mu)x_4 + (1+2\mu)x_5 + (2+3\mu)x_6]$ $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6 + s_1 = 20 \\ 5x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 5x_6 + s_2 = 40 \\ 7x_1 + 8x_2 + 10x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 8x_6 + s_3 = 60 \end{cases}$ $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

Pasul 1. Rezolvăm problema pentru μ = 0 şi obținem baza optimă:

$$B = (a_5,a_6,a_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

soluția optimă $x_B = \left(\frac{10}{31}, \frac{180}{31}, \frac{50}{31}\right)$, inversa bazei $B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{31} & \frac{12}{31} & -\frac{13}{62} \\ -\frac{10}{31} & -\frac{1}{31} & \frac{7}{31} \\ \frac{11}{31} & -\frac{2}{31} & -\frac{3}{62} \end{pmatrix}$ şi ultimul tabel simplex:

			$2+4\mu$	$3+3\mu$	$4+2\mu$	$1+4\mu$	$1+2\mu$	$2+3\mu$	0	0	0
c_B	x_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	s_1	s_2	s_3
$1+2\mu$	x_5	$\frac{10}{31}$	$\frac{5}{62}$	0	$\frac{15}{31}$	$\frac{17}{62}$	1	0	$-\frac{4}{31}$	$\frac{12}{31}$	$-\frac{13}{62}$
$2+3\mu$	x_6	$\frac{180}{31}$	$\frac{14}{31}$	0	$-\frac{9}{31}$	$-\frac{2}{31}$	0	1	$-\frac{10}{31}$	$-\frac{1}{31}$	$\frac{7}{31}$
$3+3\mu$	x_2	$\frac{50}{31}$	$\frac{25}{62}$	1	$\frac{44}{31}$	$\frac{23}{62}$	0	0	$\frac{11}{31}$	$-\frac{2}{31}$	$-\frac{3}{62}$
		$\frac{520}{31}$	$\frac{6}{31}$	0	$\frac{5}{31}$	$\frac{8}{31}$	0	0	$\frac{9}{31}$	$\frac{4}{31}$	$\frac{3}{31}$

Pasul 2. Se calculează Δ_j corespunzători bazei optime, pentru μ oarecare:

$$\Delta(\lambda) = c_B^T(\mu)\cdot B_0^{-1}\cdot A - c(\mu) =$$

$$= \left(\frac{6}{31} - \frac{79}{62}\mu,\ 0\ ,\frac{5}{31} + \frac{73}{31}\mu, \frac{8}{31} - \frac{157}{62}\mu,\ 0\ ,\ 0\ , \frac{9}{31} - \frac{5}{31}\mu, \frac{4}{31} + \frac{15}{31}\mu, \frac{3}{31} + \frac{7}{62}\mu,\right)$$

Pasul 3. Se rezolvă sistemul de inecuaţii $x_B \geq 0$:

$$\Delta(\mu) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6}{31} - \frac{79}{62}\mu \geq 0 \\ \frac{5}{31} + \frac{73}{31}\mu \geq 0 \\ \frac{8}{31} - \frac{157}{62}\mu \geq 0 \\ \frac{9}{31} - \frac{5}{31}\mu \geq 0 \\ \frac{4}{31} + \frac{15}{31}\mu \geq 0 \\ \frac{3}{31} + \frac{7}{62}\mu \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \mu \in \left[-\frac{5}{73}, \frac{16}{157}\right] \Rightarrow \underline{\mu_0} = -\frac{5}{73} \text{ şi } \overline{\mu^0} = \frac{16}{157}$$

Pasul 4. Se observă că pentru μ aflat în imediata vecinătate a lui $\overline{\mu^0}$ şi $\mu > \overline{\mu^0}$ vom avea un singur Δ_j negativ şi anume Δ_4. Pentru un astfel de μ, soluţia corespunzătoare bazei B este primal admisibilă şi, aplicând algoritmul simplex primal, x_4 va fi introdusă în bază şi înlocuită cu x_5. Se obţin:

– noua bază $B = (a_4, a_6, a_2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \\ 3 & 8 & 8 \end{pmatrix}$ şi $B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{17} & \frac{24}{17} & -\frac{13}{17} \\ -\frac{6}{17} & \frac{1}{17} & \frac{3}{17} \\ \frac{9}{17} & -\frac{10}{17} & \frac{4}{17} \end{pmatrix}$

– noua soluţie:

$$x_B = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} -\frac{8}{17} & \frac{24}{17} & -\frac{13}{17} \\ -\frac{6}{17} & \frac{1}{17} & \frac{3}{17} \\ \frac{9}{17} & -\frac{10}{17} & \frac{4}{17} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{20}{17} \\ \frac{100}{17} \\ \frac{20}{17} \end{pmatrix}$$

– noul tabel simplex corespunzător noii baze:

			$2+4\mu$	$3+3\mu$	$4+2\mu$	$1+4\mu$	$1+2\mu$	$2+3\mu$	0	0	0
c_B	x_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	s_1	s_2	s_3
$1+4\mu$	x_4	$\frac{20}{17}$	$\frac{5}{17}$	0	$\frac{30}{17}$	1	$\frac{62}{17}$	0	$-\frac{8}{17}$	$\frac{24}{17}$	$-\frac{13}{17}$
$2+3\mu$	x_6	$\frac{100}{17}$	$\frac{8}{17}$	0	$-\frac{3}{17}$	0	$\frac{4}{17}$	1	$-\frac{6}{17}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{3}{17}$
$3+3\mu$	x_2	$\frac{20}{17}$	$\frac{5}{17}$	1	$\frac{13}{17}$	0	$-\frac{23}{17}$	0	$\frac{9}{17}$	$-\frac{10}{17}$	$\frac{4}{17}$
			$\frac{2}{17}-\frac{9}{17}\mu$	0	$-\frac{5}{17}+\frac{116}{17}\mu$	0	$-\frac{16}{17}+\frac{157}{17}\mu$	0	$\frac{7}{17}-\frac{23}{17}\mu$	$-\frac{4}{17}+\frac{69}{17}\mu$	$\frac{5}{17}-\frac{31}{17}\mu$

– noul interval pe care este optimă noua bază:

$$\begin{cases} \frac{2}{17} - \frac{9}{17}\mu \ \geq \ 0 \\ -\frac{5}{17} + \frac{116}{17}\mu \ \geq \ 0 \\ -\frac{16}{17} + \frac{157}{17}\mu \ \geq \ 0 \\ \frac{7}{17} - \frac{23}{17}\mu \ \geq \ 0 \\ -\frac{4}{17} + \frac{69}{17}\mu \ \geq \ 0 \\ \frac{5}{17} - \frac{31}{17}\mu \ \geq \ 0 \end{cases} \Rightarrow \mu \in \left[\frac{16}{157}, \frac{5}{31}\right] \Rightarrow \overline{\mu^0} = \frac{16}{157} \text{ şi } \overline{\mu^1} = \frac{5}{31}$$

Reluând algoritmul vom obține succesiv intervalele şi soluțiile următoare:

1. $\mu \in \left[\frac{5}{31}, \frac{3}{5}\right]$ $B = (a_4, a_6, a_9)$ $x_B = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

2. $\mu \in \left[\frac{3}{5}, +\infty\right)$ $B = (a_4, a_5, a_9)$ $x_B = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 28 \end{pmatrix}$

Pasul 5. Începând înapoi de la $\underline{\mu_0} = -\frac{5}{73}$ obținem:

3. $\lambda \in \left[-\frac{5}{34}, -\frac{5}{73}\right]$ $B = (a_3, a_6, a_2)$ $x_B = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 6 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

4. $\lambda \in \left[-\frac{6}{17}, -\frac{5}{34}\right]$ $B = (a_3, a_6, a_9)$ $x_B = \begin{pmatrix} \frac{20}{17} \\ \frac{100}{17} \\ \frac{20}{17} \end{pmatrix}$

5. $\lambda \in \left[-2, -\frac{6}{17}\right]$ $B = (a_3, a_8, a_9)$ $x_B = \begin{pmatrix} \frac{20}{17} \\ \frac{100}{17} \\ \frac{20}{17} \end{pmatrix}$

6. $\lambda \in [-\infty, -2]$ $B = (a_7, a_8, a_9)$ $x_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

La marginile intervalelor, problema va avea cel puțin două soluții de bază şi, deci, o infinitate de soluții optime (toate combinațiile convexe dintre acestea).

În concluzie, dacă:

– $\lambda \in \left(-\infty, -\frac{20}{3}\right)$ disponibilul din M_1 ar fi negativ, caz fără sens economic.

– $\lambda \in \left[-\frac{20}{3}, -4\right]$ întreprinderea va fabrica doar produse de tipul P_5.

– $\lambda \in \left[-4, -\frac{20}{11}\right]$ întreprinderea va fabrica doar produse de tipul P_5 şi P_6.

– $\lambda \in \left[-\frac{20}{11}, \frac{36}{5}\right]$ întreprinderea va fabrica doar produse de tipul P_5, P_6 şi P_2.

– $\lambda \in \left[\frac{36}{5}, \frac{60}{7}\right]$ întreprinderea va fabrica doar produse de tipul P_5, P_3 şi P_2.

– $\lambda \in \left[\frac{60}{7}, \frac{140}{11}\right]$ întreprinderea va fabrica doar produse de tipul P_3 şi P_2.

– $\lambda \in \left[\frac{140}{11}, +\infty\right)$ întreprinderea va fabrica doar produse de tipul P_3 şi P_5.