Problema duală

Problema duală este o problemă de programare liniară. Existența ei presupune existența unei alte probleme de programare liniară numită problema primală, împreună cu care formează cuplul primală – duală. Pentru a vedea cum arată problema duală trebuie să cunoaştem cum arată problema primală şi care este legătura dintre ele.

A cunoaşte cum arată problema primală înseamnă a şti:

1. Dacă problema este de maxim sau de minim;

2. Care sunt necunoscutele problemei, adică vectorul variabilelor:

$$x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

3. Care sunt coeficienții funcției obiectiv, adică elementele vectorului:

$$c^T = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

4. Care sunt termenii liberi ai restricțiilor, adică elementele vectorului:

$$b^T = (b_1, b_2, \dots, b_m)$$

5. Care sunt coeficienții combinației liniare din fiecare restricție, adică elementele matricei:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

6. Care este natura fiecărei restricții, adică dacă:

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$ **sau** $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$ **sau** $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$

7. Care este restricția de semn a fiecărei variabile, adică dacă:

$x_j \geq 0$ **sau** $x_j \leq 0$ **sau** x_j – oarecare

Problema duală se construieşte folosind elementele problemei primale şi o serie de reguli, câte una pentru fiecare din cele şase componente ale unei probleme de programare liniară, listate mai sus.

În acest scop vom nota elementele problemei duale cu:

- u^T = vectorul variabilelor problemei duale;
- c_D^T = vectorul coeficienților funcției obiectiv ai problemei duale;
- b_D^T = vectorul termenilor liberi ai restricțiilor din problema duală;
- A_D = matricea coeficienților combinațiilor liniare din restricțiile problemei duale;

şi vom introduce noțiunile de restricție concordantă şi restricție neconcordantă:

– O restricţie se numeşte *concordantă* dacă:

  – Este de tipul: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$ într-o problemă de **minim** sau
  – Este de tipul: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$ într-o problemă de **maxim**.

– O restricţie se numeşte *neconcordantă* dacă:

  – Este de tipul: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$ într-o problemă de **maxim** sau
  – Este de tipul: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$ într-o problemă de **minim**.

– O restricţie de tipul: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$ **nu** este nici concordantă nici neconcordantă.

În aceste condiţii, problema duală va avea componentele:

– Duala va fi o problemă de minim dacă primala este de maxim şi reciproc;
– $\mathbf{u}^T = (\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \dots \mathbf{u_m})$, deci duala va avea m variabile, număr egal cu numărul de restricţii al primalei, fiecare variabilă u_i fiind asociată unei restricţii *i* a primalei;
– $\mathbf{c}_D^T = \mathbf{b}^T$, deci coeficienţii funcţiei obiectiv a dualei sunt termenii liberi ai restricţiilor primalei;
– $\mathbf{b}_D^T = \mathbf{c}^T$, deci termenii liberi din restricţiile dualei sunt coeficienţii funcţiei obiectiv a primalei.
– $\mathbf{A_D} = \mathbf{A}^T$, deci restricţiile dualei se obţin înmulţind fiecare coloană a matricei primalei cu vectorul variabilelor dualei. În acest mod şi variabilelor primalei li se asociază câte o restricţie a dualei;
– restricţia *j* a dualei va fi:
  ▪ concordantă dacă $x_j \geq 0$
  ▪ neconcordantă dacă $x_j \leq 0$
  ▪ egalitate dacă x_j oarecare
– variabila u_i va fi:
  ▪ $u_i \geq 0$ dacă restricţia corespunzătoare din primală este concordantă
  ▪ $u_i \leq 0$ dacă restricţia corespunzătoare din primală este neconcordantă
  ▪ u_i oarecare dacă restricţia corespunzătoare din primală este egalitate

Din cele de mai sus se observă că, pentru a scrie restricţia *j* a dualei, avem nevoie de:

– coloana coeficienţilor corespunzători variabilei *j* din matricea problemei primale pentru a scrie termenul stâng al restricţiei:

$$a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + \dots + a_{mj}u_m$$

– restricţia de semn a variabilei x_j pentru a stabili natura restricţiei;
– coeficientul lui x_j din funcţia obiectiv a primalei, care va fi termenul liber al restricţiei;

Pentru o cât mai bună ilustrare a modului în care se găseşte duala unei probleme vom da câteva exemple.

Exemplul 1. Ne propunem să construim duala problemei următoare:

(max) $f = 2x_1 - 5x_2 + 4x_3$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 7 \\ x_2 - 5x_1 + 3x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_3 \leq 3 \\ -x_3 + 2x_1 - 5x_2 \geq 8 \end{cases}$$

$x_1 \leq 0$, x_2 oarecare, $x_3 \geq 0$

Conform regulilor de mai sus vom avea:

- duala este de minim deoarece primala este de maxim;
- variabilele dualei vor fi:

u_1	corespunzătoare restricției:	$x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 7$
u_2	corespunzătoare restricției:	$x_2 - 5x_1 + 3x_3 = 6$
u_3	corespunzătoare restricției:	$x_1 + 2x_3 \leq 3$
u_4	corespunzătoare restricției:	$-x_3 + 2x_1 - 5x_2 \geq 8$

- funcția obiectiv a dualei va fi produsul dintre termenii liberi ai restricțiilor primalei cu variabilele corespunzătoare din duală: $g = 7u_1 + 6u_2 + 3u_3 + 8u_4$
- duala va avea 3 restricții, câte variabile are primala, ele obținându-se astfel:

prima restricție (asociată variabilei x_1)

- termenul stâng al restricției se obține înmulțind coeficienții variabilei x_1 din cele 4 restricții ale primalei cu variabilele corespunzătoare acestora din duală:

$$u_1 - 5u_2 + u_3 + 2u_4$$

- termenul liber al restricției va fi coeficientul lui x_1 din funcția obiectiv a primalei, adică $b_1 = c_1 = 2$
- deoarece variabila corespunzătoare acestei restricții, x_1, este negativă, restricția va fi neconcordantă şi deoarece duala este problemă de minim rezultă că va fi cu $\leq$.

În concluzie, prima restricție va fi: $u_1 - 5u_2 + u_3 + 2u_4 \leq 2$

a doua restricție (asociată variabilei x_2)

- termenul stâng al restricției se obține înmulțind coeficienții variabilei x_2 din cele 4 restricții ale primalei cu variabilele corespunzătoare acestora din duală:

$$-u_1 + u_2 - 5u_4$$

- termenul liber al restricției va fi coeficientul lui x_2 din funcția obiectiv a primalei, adică $b_2 = c_2 = -5$
- deoarece variabila corespunzătoare acestei restricții, x_2, este oarecare, restricția va fi o egalitate.

În concluzie, a doua restricție va fi: $-u_1 + u_2 - 5u_4 = -5$

a treia restricţie (asociată variabilei x_3)

- termenul stâng al restricţiei se obţine înmulţind coeficienţii variabilei x_3 din cele 4 restricţii ale primalei cu variabilele corespunzătoare acestora din duală:

$$4u_1 + 3u_2 + 2u_3 - u_4$$

- termenul liber al restricţiei va fi coeficientul lui x_3 din fiuncţia obiectiv a primalei, adică $b_3 = c_3 = 4$
- deoarece variabila corespunzătoare acestei restricţii, x_3, este pozitivă, restricţia va fi concordantă şi deoarece duala este problemă de minim rezultă că va fi cu $\geq$.

În concluzie, a treia restricţie va fi: $4u_1 + 3u_2 + 2u_3 - u_4 \geq 4$

– restricţiile de semn ale variabilelor dualei vor fi:

- $u_1 \leq 0$, deoarece restricţia corespunzătoare este neconcordantă;
- u_2 *oarecare*, deoarece restricţia corespunzătoare este egalitate;
- $u_3 \geq 0$, deoarece restricţia corespunzătoare este concordantă;
- $u_4 \leq 0$, deoarece restricţia corespunzătoare este neconcordantă.

În final, problema duală este:

(min) $g = 7u_1 + 6u_2 + 3u_3 + 8u_4$

$$\begin{cases} u_1 - 5u_2 + u_3 + 2u_4 \leq 2 \\ -u_1 + u_2 - 5u_4 = -5 \\ 4u_1 + 3u_2 + 2u_3 - u_4 \geq 4 \end{cases}$$

$u_1 \leq 0$, u_2 oarecare, $u_3 \geq 0$, $u_4 \geq 0$

Exemplul 2. Considerăm o unitate economică care fabrică produsele P_1, P_2 şi P_3. Pentru obţinerea lor se utilizează trei resurse: forţa de muncă, mijloacele de muncă şi materii prime. În tabelul de mai jos se dau consumurile specifice şi cantităţile disponibile din cele trei resurse, precum şi preţurile de vânzare ale celor trei produse.

Resurse \ Produse	P_1	P_2	P_3	Disponibil (unităţi fizice)
Forţa de muncă	1	3	4	15
Mijloace de muncă	2	5	1	10
Materii prime	4	1	2	25
Preţ de vânzare (unităţi monetare)	3	2	6	–

Dorim să producem acele cantităţi x_i din fiecare produs pentru care:

1. se utilizează în întregime forţa de muncă;
2. se produce cel puţin o unitate din produsul de tipul P_2;
3. se obţine valoarea maximă a vânzărilor.

Modelul matematic pe baza căruia se stabileşte programul optim de producţie are forma:

$$(\max) f = 3x_1 + 2x_2 + 6x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 15 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 10 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 25 \\ x_2 \geq 1 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = 1,2,3)$$

Duala sa va fi:

$$(\min)\ g = 15u_1 + 10u_2 + 25u_3 + u_4$$

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + 4u_3 \geq 3 \\ 3u_1 + 5u_2 + u_3 + u_4 \geq 2 \\ 4u_1 + u_2 + 2u_3 \geq 6 \end{cases}$$

$$u_1 \text{ oarecare},\ u_2 \geq 0,\ u_3 \geq 0,\ u_4 \leq 0$$

Se remarcă faptul că, într-o problemă economică, nenegativitatea variabilelor primalei ($x_j \geq 0$) impune ca în duală toate restricțiile să fie concordante.

Exemplul 3.

Primala

$$(\min) f = 4x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \geq 56 \\ x_1 + 3x_2 \geq 43 \\ x_1 + 2x_2 \geq 31 \\ x_1 + x_2 \geq 20 \\ 2x_1 + x_2 \geq 30 \\ 3x_1 + x_2 \geq 41 \\ 5x_1 + x_2 \geq 65 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Duala

$$(\max)\ g = 56u_1 + 43u_2 + 31u_3 + 20u_4 + 30u_5 + 41u_6 + 65u_7$$

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + 2u_5 + 3u_6 + 5u_7 \leq 4 \\ 4u_1 + 3u_2 + 2u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 \leq 3 \end{cases}$$

$$u_I \geq 0 \ \ (i = 1,7)$$

Corespondența care există între problema primală și problema duală, atât sub aspect matematic, cât și economic, va fi lămurită de observațiile și teoremele de mai jos:

Lema 1. Duala problemei duale este problema primală.

Demonstraţia acestei leme este uşoară, făcându-se pe baza simetriilor care se observă în construcţia dualei şi va fi lăsată în seama cititorului, semnificaţia ei fiind că operaţia de trecere la duală este o operaţie involutivă (adică e o transformare f cu proprietatea: $(f \circ f)(x) = x$) şi, deci, perechea primală-duală formează un cuplu în care fiecare este duala celeilalte. Din această cauză vom vorbi de cuplul primală-duală fără a mai specifica expres care este primala şi care duala.

Observaţia 1. Dacă o problemă este la forma canonică atunci şi duala sa este o problemă la forma canonică.

Observaţia 2. Dacă o problemă este la forma standard atunci duala sa **nu** este la forma standard.

Lema 2. Dacă P_1 şi P_2 sunt două probleme de programare liniară echivalente atunci şi dualele lor sunt de asemenea echivalente. Vom înţelege, în această afirmaţie, prin probleme echivalente, două probleme care se pot obţine una din cealaltă prin transformări elementare. Aceste transformări realizează un izomorfism între mulţimile soluţiilor celor două probleme şi un homeomorfism între funcţiile lor obiectiv.

Teorema fundamentală a dualităţii.

Rezolvarea celor două probleme din cuplul primală-duală poate duce doar la unul din următoarele trei rezultate:

- Dacă una din cele două probleme are soluţie optimă finită atunci şi cealaltă are soluţie optimă finită şi valorile funcţiilor obiectiv corespunzătoare celor două soluţii sunt egale;
- Dacă una din cele două probleme are optim infinit atunci cealaltă nu are soluţii admisibile.
- Dacă una din cele două probleme nu are soluţii admisibile atunci cealaltă are optim infinit sau nu are soluţii admisibile.

Rezolvare. Presupunem că cele două probleme au fost aduse la forma canonică:

Primala	Duala
$\begin{cases}(\max)\ c^T x \\ Ax \le b \\ x \ge 0\end{cases}$	$\begin{cases}(\min)\ b^T u \\ A^T u \ge c \\ u \ge 0\end{cases}$

Această presupunere nu va afecta rezultatul, deoarece, dacă nu erau deja aşa, noile probleme sunt echivalente cu cele iniţiale. În continuare, pentru rezolvarea acestei teoreme demonstrăm următoarea lemă:

Lema 3. Dacă există soluţii admisibile pentru fiecare problemă atunci pentru orice x soluţie admisibilă a primalei şi orice u soluţie admisibilă a dualei avem:

$$c^T x \le b^T u$$

Demonstraţie: Avem:

$$A^T u \ge c \iff (A^T u)^T \ge c^T \iff u^T A \ge c^T$$

$$\begin{cases} u^T A \ge c^T \\ x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow u^T A x \ge c^T x \quad (1)$$

De asemenea:

$$\begin{cases} Ax \le b \\ u \ge 0 \Leftrightarrow u^T \ge 0 \end{cases} \Rightarrow u^T A x \le u^T b = b^T u \quad (2)$$

Obținem:

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Rightarrow b^T u \ge u^T A x \ge c^T x \quad \Leftrightarrow \quad b^T u \ge c^T x \quad \text{q.e.d}$$

Pentru a demonstra teorema, presupunem că am rezolvat una din cele două probleme, aceasta fiind considerată ca fiind primala. Avem trei variante:

1. Problema are optim finit. Fie în acest caz fie x_B o soluție de bază a primalei *sub forma standard*, care dă optimul problemei, adică $c^T x_B = \max\limits_{x \text{ admisibila}} c^T x$. Toți Δ_j corespunzători acestei baze vor fi pozitivi şi ținând cont de expresia lui Δ_j, rezultă:

$$c_B^T B^{-1} A \ge c^T \Leftrightarrow A^T (c_B^T B^{-1})^T \ge c$$

relație care spune că vectorul cu m componente $u^* = (c_B^T B^{-1})^T$ este o soluție de bază admisibilă a problemei duale (primala fiind la forma standard, variabilele dualei pot avea orice semn).

Avem, conform lemei 3: $c^T x_B \le u^T b$ pentru orice soluție admisibilă a problemei duale. Pe de altă parte $c^T x_B = c^T B^{-1} b = (u^*)^T b$ de unde rezultă că pentru orice soluție admisibilă a problemei duale se verifică:

$$(u^*)^T b \le u^T b$$

care este echivalent cu faptul că u^* este soluția de optim a dualei şi că $f(x_B) = g(u^*)$.

2. Problema are optim infinit. În acest caz, dacă duala ar avea soluții admisibile u, $g(u)$ ar fi un majorant pentru mulțimea $\{f(x)/ \text{ x admisibilă}\}$, în contradicție cu ipoteza de optim infinit.

3. Problema nu are soluții. În acest caz, dacă duala ar avea optim finit ar rezulta, conform celor arătate în varianta 1, că primala are optim finit, în contradicție cu ipoteza.

În concluzie, deoarece cele trei variante acoperă toate situațiile posibile, toate ducând la unul din rezultatele afirmate ca posibile în teoremă şi ținând cont de faptul că nu a avut importanță care problemă a fost aleasă spre rezolvare, teorema este demonstrată.

Teorema ecarturilor complementare.

Fie $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ şi $u^* = (u_1^*, u_2^*, ..., u_m^*)$ două soluții admisibile ale primalei, respectiv dualei, scrise sub forma canonică. Atunci ele sunt soluții optime ale celor două probleme dacă şi numai dacă verifică sistemul:

$$\begin{cases} u_i^* \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \right) = 0 & i = \overline{1,m} \\ \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i^* - c_j \right) x_j^* = 0 & j = \overline{1,n} \end{cases} \quad \text{sau, matricial} \quad \begin{cases} (u^*)^T (b - Ax^*) = 0 \\ [(u^*)^T A - c] \cdot x^* = 0 \end{cases}$$

Demonstrație.

"⇒" Presupunem că x^* şi u^* sunt soluţiile optime ale celor două probleme. Atunci:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r} Ax^* \le b \\ u^* \ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad (u^*)^T(b - Ax^*) \ge 0 \\ \left.\begin{array}{r} A^T u^* \ge c \\ x^* \ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad ((u^*)^T A - c)(x^*) \ge 0 \\ \text{cum } (u^*)^T b = cx^* \text{ (conform teoremei fundamentale)} \Rightarrow \\ \Rightarrow (u^*)^T(b - Ax^*) + ((u^*)^T A - c)(x^*) = (u^*)^T b - (u^*)^T Ax^* + (u^*)^T A x^* - cx^* = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (u^*)^T(b - Ax^*) = ((u^*)^T A - c)(x^*) = 0$$

"⇐"

Dacă $(u^*)^T(b - Ax^*) = ((u^*)^T A - c)(x^*) = 0 \Rightarrow (u^*)^T(b - Ax^*) + ((u^*)^T A - c)(x^*) = 0 \Rightarrow (u^*)^T b = cx^* \Rightarrow$ (conform teoremei fundamentale) x^* şi u^* sunt soluţiile optime ale celor două probleme.

Teorema ecarturilor complementare dă o caracterizare pentru optimalitatea soluţiilor primalei şi dualei, dacă ele există. Sistemul din teoremă se obţine aplicând metoda multiplicatorilor lui Lagrange pentru extreme cu legături, în cazul particular al unei probleme de programare liniară.

Această teoremă nu reprezintă o modalitate practică de a rezolva cele două probleme decât în anumite cazuri simple, rezolvarea sistemului fiind mai grea, în cazul problemelor liniare, decât rezolvarea cu algoritmul simplex al fiecărei probleme, dar, pe baza ei, se poate găsi soluţia uneia din probleme dacă se cunoaşte soluţia celeilalte sau se poate verifica dacă o soluţie a unei probleme este optimă, introducând-o în sistem, găsind celelalte necunoscute şi verificând că ele formează o soluţie admisibilă a dualei.

Observaţia 3. Demonstrarea teoremei fundamentale s-a făcut găsind efectiv soluţia optimă a dualei, considerându-se că primala a fost rezolvată cu algoritmul simplex. Ea este $c_B^T B^{-1}$ şi, pentru găsirea practică a acesteia, trebuie cunoscută B^{-1}. Matricea B^{-1} nu apare explicit în rezolvarea problemei cu algoritmul simplex, dar se poate demonstra că este formată din coloanele din tabelul simplex al soluţiei optime corespunzătoare poziţiilor care formau baza soluţiei iniţiale. $c_B^T B^{-1}$ reprezintă chiar z_j corespunzătoare acestor coloane din ultimul tabel, deci putem formula rezultatul:

"*soluţia dualei este formată din valorile z_j ale tabelului soluţiei optime, corespunzăoare vectorilor coloană ai bazei iniţiale*"

Introducerea dualităţii este motivată din mai multe puncte de vedere:

1. *Teoretic.* Una din problemele centrale ale programării matematice este caracterizarea situaţiilor în care există optimul unei probleme şi găsirea unor metode prin care să recunoaştem optimalitatea unei soluţii. Teorema fundamentală a dualităţii şi teorema ecarturilor complementare reprezintă rezultate chiar în acest sens, în care se foloseşte dualitatea.

2. *Practic.* Rezultatele obţinute mai sus conturează faptul că putem rezolva o problemă rezolvând problema duală a acesteia sau cunoscând soluţia dualei. În unele cazuri, rezolvarea dualei este mult mai uşoară decât rezolvarea primalei, de exemplu când numărul de restricţii al primalei este mai mare decât numărul de variabile al acesteia sau când primala necesită mai multe variabile suplimentare decât duala. Astfel, pentru exemplul 3 de mai sus, rezolvarea primalei duce la opt iteraţii cu tabele cu 7 linii şi 16 coloane, iar rezolvarea dualei la 5 tabele cu 2 linii şi 9 coloane. În

alte cazuri, soluțiile dualei sunt deja cunoscute, găsirea soluțiilor primalei revenind la a rezolva sistemul din teorema ecarturilor complementare, după ce au fost înlocuite soluțiile celei duale.

3. *Economic*. În cele mai multe probleme economice, a căror rezolvare se face printr-un model de programare liniară, soluția dualei aduce o serie de informații suplimentare despre problema studiată. ***Semnificația economică*** a soluției dualei depinde de specificul problemei şi trebuie găsită de la caz la caz. Expunem în continuare ***interpretarea economică*** a variabilelor şi soluțiilor dualei în cazul unei probleme de producție.

În paragrafele precedente s-a demonstrat că, prin rezolvarea unei probleme de programare liniară, se obține atât soluția optimă a problemei inițiale cât şi a problemei duale. Corespondența dintre problema inițială şi duală se reflectă în conținutul economic al parametrilor incluşi în soluția problemei duale. Semnificația economică a indicatorilor u_i este determinată de natura problemei economice şi de tipul restricțiilor problemei primale.

Într-o problemă sub formă canonică, în care se cere maximizarea funcției obiectiv, restricțiile pot fi interpretate ca inecuații ce se referă la resurse şi, de aceea, interpretarea variabilelor u_i este mai simplă.

Vom analiza modelul de programare liniară al problemelor de mai jos:

Exemplul 1: O unitate economică fabrică produsele P_1, P_2 şi P_3 utilizând trei resurse: forța de muncă, mijloace de muncă şi materii prime. Consumurile specifice, cantitățile disponibile din fiecare resursă şi prețurile de vânzare ale produselor sunt date în tabelul de mai jos:

Resurse \ Produse	P_1	P_2	P_3	Disponibil (unități fizice)
Forța de muncă	1	3	4	15
Mijloace de muncă	2	5	1	10
Materii prime	4	1	2	25
Preț de vânzare (unități monetare)	3	2	6	-

Modelul matematic pe baza căruia se stabileşte programul optim de producție, având drept criteriu de eficiență valoarea maximă a producției, are forma:

$$(\max) f = 3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 6\cdot x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 15 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 \le 10 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \le 25 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

Utilizând regulile de trecere la duală, rezultă următoarea problemă duală:

$$(\min) g = 15\cdot u_1 + 10\cdot u_2 + 25\cdot u_3$$

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + 4u_3 \ge 3 \\ 3u_1 + 5u_2 + u_3 \ge 2 \\ 4u_1 + u_2 + 2u_3 \ge 6 \end{cases}$$

$$u_1, u_2, u_3 \ge 0$$

După rezolvarea cu algoritmul simplex se obține soluția optimă a celor două probleme în ultimul tabel simplex, dat în continuare:

			3	2	6	0	0	0
c_B	x_B	x_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
6	x_3	$\frac{20}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	1	$\frac{2}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0
3	x_1	$\frac{25}{7}$	1	$\frac{17}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	0
0	x_6	$\frac{35}{7}$	0	-9	0	0	-2	1
z_j	-	$\frac{195}{7}$	3	$\frac{57}{7}$	6	$\frac{9}{7}$	$\frac{6}{7}$	0
Δ_j	-	-	0	$\frac{43}{7}$	0	$\frac{9}{7}$	$\frac{6}{7}$	0

Exemplul 2: Activitatea unei întreprinderi industriale se concretizează în fabricarea produselor omogene P_1, P_2, P_3 şi P_4, ale căror costuri unitare de producție sunt: $c_1 = 4$, $c_2 = 3$, $c_3 = 7$ respectiv $c_4 = 2$ unități monetare. Pentru desfăşurarea procesului de producție este necesar ca din produsul P_1 să se asigure un stoc de cel puțin 5 unități şi, în plus, câte cel puțin 2 unități pentru fiecare piesă P_3 (produsul P_1 intră în componența produsului P_3). În anul de bază, volumul producției realizate de întreprindere a fost de 20 unități. În urma analizei desfacerilor s-a ajuns la concluzia că cererea este în creştere. De asemenea, întreprinderea îşi propune ca în perioada de plan să obțină un beneficiu total cel puțin egal cu cel din perioada de bază, care a fost de 100 u.m.. Beneficiul unitar corespunzător celor 4 produse s-a estimat a fi de 2, 5, 8 respectiv 3 u.m..

Modelul matematic corespunzător problemei primale şi respectiv problemei duale are forma:

Primală	Duală
$(\min) f = 4\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + 7\cdot x_3 + 2\cdot x_4$	$(\max)\ g = 5x_1 + 20x_2 + 100x_3$
în condițiile	în condițiile
$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 20 \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 3x_4 \geq 100 \end{cases}$	$\begin{cases} u_1 + u_2 + 2u_3 \leq 4 \\ u_2 + 5u_3 \leq 3 \\ -2u_1 + u_2 + 8u_3 \leq 7 \\ u_2 + 3u_3 \leq 2 \end{cases}$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	u_1 oarecare, $u_2, u_3 \geq 0$ şi $u_4 \leq 0$

Exemplul 3: Considerăm problema dată în exemplul 1 căreia îi ataşăm două modificări:

1. forța de muncă trebuie folosită în întregime;
2. volumul producției planificate al produsului P_2 trebuie să fie cel puțin egal cu o unitate fizică;

Cuplul de probleme primală-duală va avea forma:

Primală	Duală
(max) $f = 3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 6\cdot x_3$	(min) $g = 15\cdot u_1 + 10\cdot u_2 + 25\cdot u_3 + u_4$
$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 15 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 \le 10 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \le 25 \\ x_2 \ge 1 \end{cases}$	$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + 4u_3 \ge 3 \\ 3u_1 + 5u_2 + u_3 + u_4 \ge 2 \\ 4u_1 + u_2 + 2u_3 \ge 6 \end{cases}$
$x_1, x_2, x_3 \ge 0$	u_1 oarecare, $u_2, u_3 \ge 0$, $u_4 \le 0$

Se constată ca, în funcția obiectiv a problemei duale, apar cantitățile disponibile din cele trei resurse, înmulțite cu mărimile u_1, u_2, şi respectiv u_3. Întrucât resursele reprezintă valori de întrebuințare diferite, cantitățile b_i nu se pot însuma decât dacă indicatorii u_i evaluează resursele în aceeaşi unitate de măsură. După cum se vede din aceste model, valoarea indicatorilor u_i depinde de cantitatea de resurse disponibile, de structura consumurilor directe din resursa respectivă şi de structura matematică a modelului.

Conform teoremei ecarturilor complementare, resurselor utilizate în întregime le corespund evaluări u_i strict pozitive, iar resurselor excedentare le corespund indicatori $u_i = 0$. Un produs P_j va apărea în soluția optimă, ($x_j > 0$) numai atunci când costul său unitar de producție, obținut prin evaluarea resurselor consumate cu ajutorul indicatorilor u_i, nu depăşeşte prețul unitar de producție c_j, adică atunci când:

$$\sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij} = c_j \qquad \text{(R)}$$

Ideea enunțată mai sus se confirmă şi în cazul exemplelor analizate. Astfel, în exemplul 1, produsul P_2 nu apare în soluția optimă ($x_2 = 0$) deoarece costul său de producție depăşeşte prețul unitar de realizare:

$$a_{12}\cdot u_1 + a_{22}\cdot u_2 + a_{32}\cdot u_3 > c_2$$

$$\text{adică: } 3\cdot\frac{9}{7} + 5\cdot\frac{6}{7} + 1\cdot 0 = 8{,}1 > 2.$$

Celelalte două produse intră în programul optim, întrucât este satisfăcută relația (R). Deci, fabricarea unui produs care nu figurează în programul optim este neeficientă din punctul de vedere al folosirii resurselor.

Prin urmare, pentru o problemă de programare liniară scrisă sub forma canonica, în care se urmăreşte maximizarea funcției f (x), mărimea u_i reprezintă valoarea ultimei unități folosite în producție din resursa R_i.

Având în vedere că max[f(x)] = min [g(u)], rezultă că, dacă, cantitatea disponibilă din resursa R_i creşte cu o unitate, atunci valoarea funcției obiectiv creşte cu u_i, deci u_i măsoară creşterea valorii funcției obiectiv determinată de creşterea cu o unitate a cantității disponibile b_i.

Aceste evaluări obținute dintr-un program optim au fost denumite în literatura de specialitate "prețuri umbră" sau "evaluări obiectiv determinate".

Prețul umbră u_i arată cu cât se modifică funcția obiectiv a problemei duale[1], atunci când termenul liber al restricției R_i se "relaxează" cu o unitate. A "relaxa" are semnificația de a spori cantitatea disponibilă b_i a unei resurse deficitare sau, pentru restricțiile de tip calitativ cu limită

[1] Dar şi a problemei primale, întrucât f(x) şi g(u) sunt legate prin teorema dualității

inferioară impusă ($\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$), de a reduce nivelul termenului liber b_i. Este evident că, dacă o resursă nu este utilizată în întregime pentru satisfacerea programului optimal x_B ($\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j < b_i$), atunci $u_i = 0$ iar funcţia obiectiv nu este afectată de sporirea[2] cantităţii disponibile b_i. În cazul restricţiilor de tip calitativ, acestea nu constituie un "loc îngust" pentru programul optimal x_B dacă şi numai dacă $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j > b_i$, ca urmare $u_i = 0$ iar funcţia obiectiv nu este influenţată de reducerea[2] nivelului pentru indicatorul b_i.

Pentru o problemă scrisă sub formă canonică, în care se cere minimizarea funcţiei $f(x)$, restricţiile se referă, aşa cum s-a arătat, la caracteristici economice cărora li se impun limite inferioare sau la indicatori calitativi cu limită inferioară stabilită; în acest caz preţul umbră u_i măsoară creşterea costului total al producţiei, a cheltuielilor de muncă, a cheltuielilor cu fondurile fixe etc., determinată de creşterea cu o unitate a componentei b_i a vectorului termenilor liberi. Astfel, daca la exemplul 2 planul de producţie prevede o creştere a volumului producţiei de la 20 unităţi la 21 unităţi, atunci costul total al producţiei va creşte cu u_2 unităţi.

În cazul problemelor de programare liniară care conţin restricţii neconcordante şi egalităţi, la interpretarea preturilor umbră trebuie să se ţină seama de natura economică a funcţiei obiectiv şi de semnul variabilei u_i. Pentru a elucida acest aspect, ne vom referi la modelul matematic ce rezultă din exemplul 3.

Soluţiile optimale ale problemei primale şi duale sunt:

$$x_B = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (8/7, 1, 19/7, 0, 14, 0)$$

$$u_B = (u_1, u_2, u_3, u_4) = (9/7, 6/7, 0, -43/7).$$

Se constată imediat că valoarea funcţiei obiectiv $f(x_B) = g(u_B) = 152/7$ este mai mică decât cea obţinută prin rezolvarea modelului din exemplul 1, cu $\Delta f(x) = 195/7 - 152/7 = 43/7$ unităţi monetare[3]. Această diferenţă apare datorită introducerii restricţiei $x_2 > 1$, al cărei preţ umbră este $u_4 = -43/7$. Prin urmare variabila u_4 arată cu cât scade valoarea funcţiei obiectiv $f(x)$ atunci când nivelul minim impus variabilei x_2 este mai mare cu o unitate.

În sfârşit variabila $u_1 = 9/7$, care este ataşată unei restricţii sub formă de egalitate, arată că sporirea cu o unitate a nivelului forţei de muncă disponibile conduce la creşterea valorii producţiei cu 9/7 unităţi monetare.

Rezultă că preţurile umbră aduc informaţii suplimentare pentru analiza eficienţei economice a resurselor şi a diferiţilor indicatori economici sau tehnici care apar în restricţiile unei probleme de programare liniară. Pe baza lor se pot fundamenta deciziile privind alocarea judicioasă a resurselor, se pot stabili măsuri de stimulare a consumului raţional al resurselor, se determină cât mai corect nivelul minim şi maxim al diferiţilor indicatori tehnici şi economici de care depinde structura planului optim.

Soluţia optimă obţinută prin utilizarea datelor iniţiale poate constitui un punct de plecare pentru analiza economică privind alocarea eficientă a resurselor. Vom ilustra acest aspect folosind modelul matematic elaborat în cadrul exemplului 1.

În tabelul de mai jos se dau soluţiile optime ale cuplului primală-duală, pentru diferite valori

[2] Variaţia termenului liber b_i trebuie interpretată ca o modificare Δb_i, în condiţiile în care celelalte restricţii nu se modifică. Vezi exemplul 1.

[3] Reamintim că exemplul 3 s-a obţinut din exemplul 1 ca urmare a unor transformări. Precizăm că, în soluţiile optime ale ambelor modele, prima restricţie se verifică cu egalitate. De aceea, diferenţa dintre cele două soluţii este determinată numai de restricţia $x_2 > 1$.

ale primei resurse ($b_2 = 10$, $b_3 = 25$).

	Cantitatea disponibilă din prima resursă (b_1)					
Variabile	15	16	26	36	40	41
u_4	3	3	3	3	3	3
x_1	25/7	24/7	2	4/7	0	0
u_5	57/7	57/7	57/7	57/7	57/7	30
x_2	0	0	0	0	0	0
u_6	6	6	6	6	6	6
x_3	20/7	22/7	6	62/7	10	10
u_1	9/7	9/7	9/7	9/7	9/7	0
x_4	0	0	0	0	0	1
u_2	6/7	6/7	6/7	6/7	6/7	6
x_5	0	0	0	0	0	0
u_3	0	0	0	0	0	0
x_6	5	5	5	5	5	5
$f(x)$	195/7	204/7	42	55	60	60

Se observă că între anumite limite de variație ale primei resurse, prețurile umbră au aceeaşi valoare. Pentru valori mai mari decât 40 unități, prețurile umbră au o altă valoare, deoarece, în acest caz, prima resursă şi a treia devin excedentare. Valoarea funcției de eficiență va creşte cu $u_1 \cdot \Delta b_1$, unde Δb_1 reprezintă sporul disponibilului din prima resursă. Pentru $b_1 > 40$ prețul umbră al resursei a doua este $u_2 = 6$, deci valoarea funcției eficiență va creşte cu 6 unități, atunci când b_2 creşte cu o unitate. Aste informații sunt utile pentru fundamentarea planului de producție aprovizionare cu diverse resurse.

La interpretarea influenței pe care variația cantității disponibile b_i o are asupra prețurilor umbră, trebuie să se țină seama că b_i este o variabilă continuă. Din această cauză u_i se defineşte astfel:[4]

$$u_i = \frac{\partial F}{\partial b_i}$$

Este clar că u_i va avea o altă valoare când b_i creşte (scade) peste o anumită limită (de exemplu $b_i > 40$).

După cum s-a arătat mai înainte, în cadrul algoritmului simplex se stabileşte activitatea cea mai eficientă a_k, prin folosirea criteriului de intrare:

$$\Delta Z_k = \min (z_j - c_j) \text{ la problemele de maxim}$$

$$\Delta Z_k = \max (z_j - c_j) \text{ la. problemele de minim}$$

Având în vedere relația formulele de calcul ale lui ΔZ şi u_B, rezultă că:

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i y_{ij} = \sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij} \quad j \in J_S$$

[4] F este o funcție de tip Lagrange, obținută din problema standard de programare liniară astfel:

$$F = f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i \cdot R_i(x)$$

unde $R_i(x)$ reprezintă restricțiile problemei de programare liniară iar u_i, $1 \le i \le m$ sunt multiplicatorii lui Lagrange.

unde y_{ij} reprezintă elementele coloanei j din tabelul simplex corespunzător unei soluții de bază. În cea de a doua sumă a relației precedente se evaluează coeficienții consumurilor directe, corespunzători activității a_j, prin prețurile umbră atașate celor m restricții și, de aceea, mărimea rezultată poate fi interpretată ca un preț umbră al produsului sau activității j. Trebuie precizat că, pentru fiecare bază, vom dispune de un vector $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ care se referă la fluxurile intrări - ieșiri corespunzătoare soluției de bază. De aceea, evaluările privind eficiența economică a activităților a_j ($j \in J_S$ = indicii variabilelor secundare), făcute cu ajutorul indicatorilor u_i, sunt valabile numai pentru baza considerată.

Concluziile obținute pe baza analizei corespondenței biunivoce dintre problema primală și cea duală ne permit să înțelegem sensul economic al criteriului de intrare în bază.

Pentru problemele în care se cere maximizarea funcției $f(x)$, indicatorii z_j reprezintă costul unitar de fabricație al produsului j, rezultat din evaluarea coeficienților a_{ij} prin prețurile umbră atașate restricții1or. Rezultă că, prin calcularea diferenței Δ_j, se compară acest cost unitar cu coeficientul c_j (preț unitar, beneficiu unitar etc.) din funcția obiectiv. Dacă există diferențe negative ($\Delta_j < 0$) înseamnă că, la activitățile respective, prețul umbră al produsului j (costul unitar de fabricație exprimat în indicatori u_i) este mai mic decât venitul realizat și de aceea activitatea a_j este eficientă. Așa se explică faptul că va intra în bază vectorul a_k ce corespunde diferenței Δz_j minime. În momentul în care toate diferențele sunt pozitive ($\Delta z_j \geq 0$) rezultă că nu mai există activități eficiente și prin urmare soluția de bază analizată este optimă.

În cazul problemelor de minim, indicatorii z_j se pot interpreta ca venituri, exprimate în prețurile umbră ale restricțiilor, ce se obțin prin realizarea unei unități din produsul j. Prin urmare, dacă există diferențe pozitive ($\Delta z_j > 0$), activitățile a_j corespunzătoare sunt eficiente, deoarece se realizează un venit unitar mai mare decât costul unitar de fabricație ($z_j > c_j$). De aceea, va intra în bază activitatea a_k, corespunzătoare diferenței maxime, iar soluția de bază se consideră optimă atunci când toate diferențele Δz_j sunt nepozitive ($\Delta z_j \leq 0$).