Valoarea Prezentă Netă în Modelele Dinamice

Conceptul de *valoare prezentă netă* (VPN) este utilizat în teoria economică pentru evaluarea proiectelor de investiţii, compararea acestora şi acceptarea sau respingerea lor.

Valoarea prezentă netă se defineşte ca sumă a valorilor prezente aşteptate ale veniturilor lichide pe o perioadă de timp, mai puţin capitalul investit.

Dacă $VPN > 0$, proiectul aduce o rată de revenire mai mare decât rata de scont. Rata de scont este egală cu costul de oportunitate al capitalului, respectiv venitul pe care îl obţine firma investindu-şi capitalul în proiecte alternative.

Considerăm rata de scont egală cu rata de revenire aşteptată a acţionarilor.

Firma va accepta un proiect numai dacă $VPN \geq 0$ şi va alege proiectul cu VPN maximă, adică: $\{\max\limits_i \{VPN_i | VPN_i \geq 0\}\}$.

Dacă investitorul are un capital limitat, el va alege proiectul care are indicele VPN maxim: $I_{VPN} = \dfrac{\text{VPN}}{\text{capital investit}} \Rightarrow \max\limits_i \{I_{VPN_i} | I_{VPN_i} > 0\}$.

Presupunem că un investitor are W_0 resurse monetare disponibile. Decizia întreprinzătorului va consta în partea din aceste resurse pe care le poate consuma în acest an şi partea pe care trebuie să o investească pentru a-şi spori consumul în anul viitor.

Dacă piaţa capitalului este perfect competitivă, preţul pe piaţa de capital este constant şi egal cu rata dobânzii, de unde rezultă că rata de revenire aşteptată a individului este egală cu rata dobânzii.

Vom avea:

$W_0 = C_0 + I_0$, unde:

W_0 – capitalul investit iniţial;

C_0 – consumul la momentul iniţial;

I_0 – investiția la momentul inițial.

Notăm $\alpha = \dfrac{\text{profitul investitiei}}{W_0}$ (randamentul investiției)

Dacă $W_0 = I_0 \Rightarrow \alpha W_0 = \Pi_0$, profitul perioadei 1, în ipoteza că tot capitalul în momentul 0 a fost investit.

Funcția de consum este $f(C_0, C_1)$, cu:

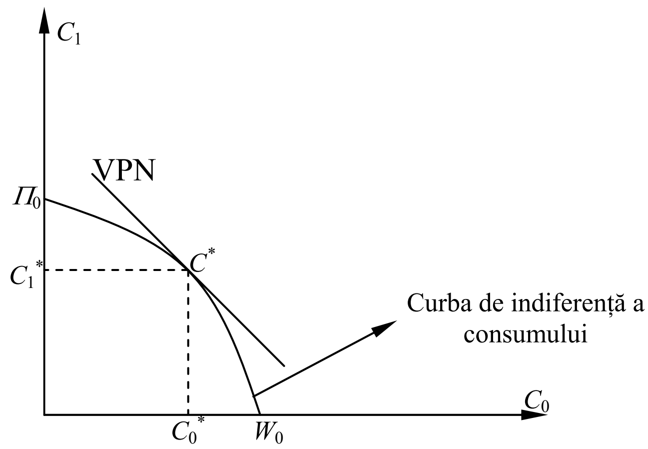
$f(0, C_1) = \alpha W_0 = \Pi_0$; $f(C_0, 0) = W_0$

curba de indiferență a consumului intersectează coordonatele în punctele $(W_0, 0)$, respectiv $(0, \Pi_0)$.

Curba de indiferență a VPN este mulțimea combinațiilor (C_0, C_1) care aduc aceeaşi VPN pentru W_0 dat.

Punctul C^* va fi punctul de tangență al celor două curbe de indiferență.

Notăm cu i rata de revenire aşteptată a investitorului, egală cu rata de



scont, egală cu costul de oportunitate al capitalului.

$$(1) \qquad VPN(C_1^*) = \frac{C_1^*}{1+i} - I_0^* = \frac{C_1^*}{1+i} + C_0^* - W_0$$

$I_0^* = W_0 - C_0^*$, $\dfrac{C_1^*}{1+i}$ este valoarea prezentă a consumului în perioada 1.

Calculul VPN pentru MDF

Definim investiția marginală ca sporul de venit adus de o unitate monetară suplimentară de investiție.

Traiectoria 4: $\mu_3(t) = 0,\ \nu_1(t) > 0,\ \nu_2(t) = 0$

$$\dot{\lambda}_1(t) = \{i-(1-f)r\}\lambda_1(t) + \nu_1(t) - (1+k)\nu_2(t)$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = (i+a)\lambda_2(t) - \lambda_1(t)(1-f)\{\Pi'_K - r\} - \nu_1(t) + \nu_2(t)$$

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial I(t)} = 0 \Rightarrow \lambda_2(t) = 0 \Rightarrow \dot{\lambda}_2(t) = 0$$

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial D(t)} = 0 \Rightarrow 1 - \lambda_1(t) + \mu_3(t) = 0$$, dar $\mu_3(t) = 0 \Rightarrow \lambda_1(t) = 1$

Din ecuația de evoluție a lui $\lambda_2(t)$ rezultă:

$$0 = -\lambda_1(t)(1-f)\{\Pi'_K - r\} - \nu_1(t) \Rightarrow$$

$$\nu_1(t) = -\lambda_1(t)(1-f)\{\Pi'_K - r\} = \lambda_1(t)(1-f)\{-S'_K + a + r\}$$

$$S(Q) = pQ(K)$$

$$\Pi = pQ(K) - aK$$

$$\Pi'_K = S'_K - a$$

Înlocuim $\nu_1(t)$ în expresia lui $\dot{\lambda}_1(t)$:

$$\dot{\lambda}_1(t) = \lambda_1(t)\{(i+a) - (1-f)S'_K - fa\}$$

Integrând ecuația diferențială și ținând seama că pe traiectoria 4 $\lambda_1(T) = 1$, obținem:

$$\lambda_1(t) = \int_t^T \{(1-f)S'_K(K(s)) + fa\}e^{-(i+a)(s-t)}ds + e^{-(i+a)(T-t)}$$

Dar $\lambda_1(t) = 1$, rezultând că pe traiectoria 4, VPN este:

$$(2) \qquad \underbrace{\int_t^T \{(1-f)S'(K(s)) + fa\}e^{-(i+a)(s-t)}ds}_{A} + \underbrace{e^{-(i+a)(T-t)}}_{B} - \underbrace{1}_{C} = 0$$

$$S(K(s)) = p(Q)\cdot Q = p(Q)\cdot qK(s)$$

$$\Pi(K(s)) = S(K(s)) - aK(s)$$

$\Pi'_K(K(s)) = S'_K(K(s)) - a$ este profitul marginal al unei unități de capital.

$(1-f)\Pi'(K(s)) = (1-f)S'(K(s)) - a + af$ este profitul marginal după impozitare, adus de o unitate de bun capital.

Observații:

A: - observăm că din profitul marginal după impozitare, lipsește termenul *a*, care este însă regăsit în exponențială.

– $e^{-a(s-t)}$ este partea dintr-o unitate de bun capital existent în momentul t care rămâne (valoarea rămasă) în momentul $s > t$, ținând seama de contribuția amortizării.

– $e^{-i(s-t)}$ este valoarea actualizată a venitului produs în intervalul $(s - t)$, $s > t$.

– termenul A reprezintă valoarea actualizată a profitului net (după taxare), pe intervalul $[t, T]$.

B:

– valoarea prezentă a unei unități de bun capital (echipamente), existent în funcțiune la momentul T.

– $e^{-a(T-t)}$ este valoarea rămasă a capitalului în momentul T.

– $e^{-i(T-t)}$ este valoarea prezentă a unei unități de capital social în momentul T.

C reprezintă cheltuielile de investiții de 1 u.m.

Membrul stâng al relației (2) reprezintă venitul net actualizat al unei unități monetare investite, deci VPN a investiției marginale.

Din relația (2) VPN a investiției marginale este egală cu 0, de unde rezultă că valoarea actualizată a fluxurilor de profit net egalează investiția marginală de o unitate monetară, deci firma a atins scala optimă de fabricație.

Expresia VPN pe traiectoriile 1, 2, 3 este dată de multiplicatorul $\mu_3(t)$, atașată restricției de nenegativitate a dividendelor.

$\mu_3(t)$ reprezintă valoarea suplimentară a Lagrangeanului, dacă limita minimă a dividendelor descrește cu o unitate monetară. În acest caz, firma va dispune de o unitate monetară suplimentară pe care o va cheltui fie pentru investiții, fie pentru plata dividendelor.

VPN pe traiectoria 3:

$$(3)\ \mu_3(t) = \int_t^T \{(1-f)S'(K(s)) + fa\}e^{-(i+a)(s-t)}ds$$

$$+\int_t^T \{(1-f)S'(K(s)) + fa\}e^{-a(s-t)}\mu_3(s)e^{-i(s-t)}ds + e^{-(i+a)(T-t)} - 1$$

<u>Pe traiectoria 3</u>, $\mu_3(t) > 0 \Rightarrow$ VPN a investiției marginale este strict pozitivă, deci fluxul marginal de venituri este mai mare decât cheltuielile marginale de investiții, ceea ce înseamnă că pentru firmă este optimal să investească la maxim. Deoarece pe traiectoria 3 $Y(t) = 0$, finanțarea creșterii pe traiectoria 3 se va face din acțiuni.

<u>Pe traiectoria 1</u>, $\mu_3(t) > 0 \Rightarrow$ VPN a investiției marginale este strict pozitivă, deci este preferabil pentru firmă să investească la maxim. Întrucât

pe această traiectorie $Y(t) = kX(t)$, finanțarea se va face din împrumut maxim şi din acțiuni.

Pe traiectoria 2, $\mu_3(t) > 0$, dar $\dot{\mu}_3(t) < 0$; este profitabil pentru firmă să-şi amortizeze împrumutul, întrucât VPN scade. Pe traiectoria 2, firma îşi va opri creşterea şi îşi va amortiza împrumutul (consolidare).

Pe traiectoria 5, $\mu_3(t) = 0 \Rightarrow VPN = 0 \Rightarrow$ firma şi-a atins nivelul de echilibru, îşi opreşte dezvoltarea şi plăteşte dividende.

Regula VPN este folosită pentru decizia de investiții a firmei, dată fiind structura de finanțare (cu ajutorul VPN nu se poate decide structura optimă de finanțare).

Teoria Costurilor de ajustare

Costurile de ajustare sunt generate de cheltuielile de investiții ale firmei. Costurile de ajustare pot fi:

- costuri de ajustare interne: înlocuirea liniilor tehnologice şi pregătirea forței de muncă generate de instalarea noului echipament;
- costuri de ajustare externe: practica marketingului de către firmele furnizoare de capital, care poate duce la creşterea prețului activelor pe termen scurt.

Se presupune că $A'(I) > 0$, deci costurile de ajustare sunt crescătoare, şi pozitive ($A(I) > 0$).

Se pune problema dacă costurile marginale sunt constante, crescătoare sau descrescătoare, în raport cu volumul investiției: $A''(I) = 0$ (costuri de ajustare liniare), $A''(I) < 0$ (costuri de ajustare concave) sau $A''(I) > 0$ (costuri de ajustare convexe).

Situația $A''(I) > 0$ (costuri de ajustare convexe) se aplică pieței monopsonice de capital (există o singură firmă care cumpară un anumit factor de producție).

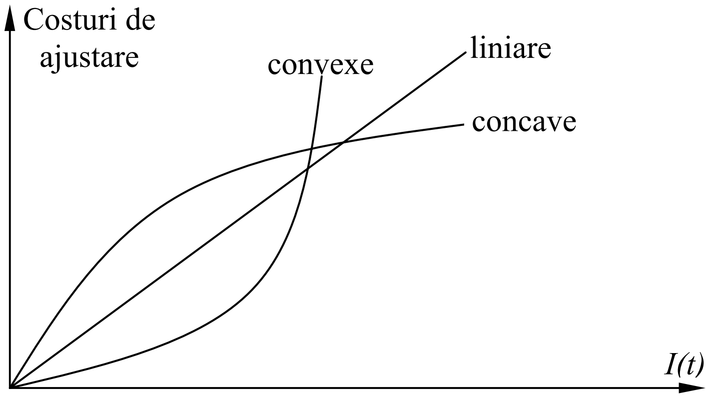
În cazul în care $A'(I) > 0$ şi $A''(I) > 0$, rata de creştere a costului va creşte o dată cu creşterea capitalului achiziționat; deci firma va controla creşterea capitalului.

Controlul creşterii capitalului (ajustarea) se va face în conformitate cu mecanismul acceleratorului flexibil.

$$\dot{K}(t) = a[K^* - K(t)] \tag{4}$$

unde $I(t) = aK^* = I^*$ este investiția optimă, K^* este stocul dorit de capital (poate fi valoarea staționară a capitalului), iar a este coeficientul vitezei de ajustare (egal cu rata de amortizare).

Relația (4) exprimă faptul că acumularea bunurilor capital este proporțională cu diferența între capitalul dorit şi stocul de capital al firmei.



Model de creştere a firmei cu autofinanțare şi cu cheltuieli de ajustare convexe

Transformăm MDF în ipoteza că nu există posibilitatea de creditare. Diferențele față de MDF:

– nu există credite;

– nu există taxe pe profiturile corporale;

– există costuri de ajustare.

(5) $$\max_{D,I} \int_0^T D(t)e^{-it}\,dt + X(T)e^{-iT}$$

Relația de balanță:

(6) $K(t) = X(t)$

Funcția costului de ajustare:

(7) $A(I(t)) \geq 0, A'(I) > 0, A''(I) > 0, A(0) = 0$

Funcția de producție este liniară:

(8) $Q(t) = qK(t)$

Funcția vânzărilor este:

(9) $S(K(t)) = p(Q(t)) \cdot Q(t)$

Ecuația de creştere a valorii acțiunilor este:

(10) $\dot{X}(t) = S(K(t)) - aK(t) - A(I(t)) - D(t)$; veniturile din vânzări, după scăderea deprecierii şi a costurilor de ajustare sunt folosite pentru autofinanțare şi plata dividendelor.

(11) $X(0) = X_0 > 0$; valoarea acțiunilor în momentul inițial este strict pozitivă.

Ecuația de evoluție a capitalului:

(12) $\dot{K}(t) = I(t) - aK(t)$

(13) $K(0) = K_0 > 0$

(14) $D(t) \geq 0$

(15) $I(t) \geq 0$

Din relația (6), $K(t) = X(t) \Rightarrow \dot{K}(t) = \dot{X}(t)$; iar din (10) şi (12):

$I(t) - aK(t) = S(K(t)) - aK(t) - A(I(t)) - D(t) \Rightarrow$

(16) $D(t) = S(K(t)) - I(t) - A(I(t))$

Ținând seama de (16) şi substituind *X(t)* prin *K(t)*, obținem:

(17) $\max\limits_{I} \int\limits_{0}^{T} [S(K(t)) - I(t) - A(I(t))] e^{-it} dt + K(T) e^{-iT}$

(18) $\dot{K}(t) = I(t) - aK(t)$

(19) $S(K(t)) - I(t) - A(I(t)) \geq 0$ (nenegativitatea dividendelor)

(20) $I(t) \geq 0$

(21) $K(0) = K_0 > 0$

Introducem o restricție suplimentară care ne asigură ca stocul de capital creşte, atunci când investițiile sunt mai mari decât amortizarea capitalului ($I(t) > aK(t) \Rightarrow \dot{X}(t) > 0$).

(22) $S(K(t)) - aK(t) - A(I(t)) > 0$

Funcția Lagrangean:

(23) $$\begin{gathered} L(K(t), I(t), \lambda(t), \mu_1(t), \mu_2(t)) = \\ [S(K(t)) - I(t) - A(I(t))](1 + \mu_1(t)) + \lambda(t)[I(t) - aK(t)] + \mu_2(t) I(t) \end{gathered}$$

Condițiile de optim:

(24) $\dfrac{\partial L(\cdot)}{\partial I(t)} == 0 \Rightarrow -[1 + A'(I(t))](1 + \mu_1(t)) + \lambda(t) + \mu_2(t) = 0$

(25) $\dot{\lambda}(t) = i\lambda(t) - \dfrac{\partial L(\cdot)}{\partial K(t)} = -S'(K(t))(1 + \mu_1(t)) + (i + a)\lambda(t)$

(26) $\mu_1(t) \geq 0$

(27) $\mu_1(t)[S(k(t)) - I(t) - A(I(t))] = 0$

(28) $\mu_2(t) \geq 0$

(29) $\mu_2(t)I(t) = 0$

(30) $\lambda(T) = 1$

Soluția $\mu_1(t) > 0$ şi $\mu_2(t) > 0$ este inadmisibilă, întrucât ar rezulta *D(t) = I(t) = 0.*

Traiectorii admisibile

Tr.	$\mu_1(t)$	$\mu_2(t)$	*I(t)*	*D(t)*	Politica firmei
1	+	0	max	0	creştere maximă
2	0	0	> 0	> 0	Politică de echilibru
3	0	+	0	max	restrângere

Aplicându-se procedura de cuplare, obținem patru traiectorii optimale:

TR I: tr 1→tr 2→tr 3

TR II: tr 2→tr 3

TR III: tr 3→tr 2→tr 3

TR IV: tr 3

Observăm că TR II şi TR IV sunt incluse în TR I şi TR III.

Se va alege una din traiectoriile de magistrală, în funcție de VPN la începutul perioadei.

Dacă:

- $VPN_0 > 0$, se alege magistrala I;
- $VPN_0 = 0$, se alege magistrala II;
- $VPN_0 < 0$, se alege magistrala III si IV.

Traiectoria de magistrală i, $vpn_0 > 0$

Firma porneşte activitatea pe traiectoria 1, nu plăteşte dividende, investeşte toate câstigurile, împrumuturile nefiind posibile.

Expresia VPN pe traiectoria 1 este:

$$(31)\quad \begin{aligned}(1+A'(I))\mu_1(t) &= \int_t^T \underbrace{S'(K(s))e^{-(i+a)(s-t)}ds}_{A} + \\ &\int_t^T \underbrace{S'(K(s))e^{-a(s-t)}\mu_1(s)e^{-i(s-t)}ds}_{B} + \underbrace{e^{-(i+a)(T-t)}}_{C} - \underbrace{(1+A'(I))}_{D}\end{aligned}$$

Observaţii:

$\mu_1(t)$ este multiplicatorul lui Lagrange ataşat restricţiei de nenegativitate a dividendelor: $\mu_1(t)(S(K)-I(t)-A(I))=0$; dividendele sunt egale cu venitul net din vânzări şi sunt pozitive; rezultă că investiţiile şi costul de ajustare trebuie să fie maxim valoarea venitului din vânzări *S(K)*.

$\mu_1(t)$ arată creşterea Lagrangeanului, dacă se creşte cu o unitate monetară venitul net din vânzări (adică dividendele).

$[1+A'(I)]$ exprimă cheltuiala totală, pentru a se creşte cu o unitate monetară stocul de capital.

$[1+A'(I)]\ \mu_1(t)$ arată creşterea Lagrangeanului, când stocul de capital creşte cu o unitate monetară.

A: integrantul reprezintă fluxul prezent de lichidităţi generat de valoarea rămasă a unei unităţi monetare de bunuri capital achiziţionată în momentul *t* şi aflată în funcţiune în momentul *s*; integrala reprezintă valoarea prezentă a fluxului de lichidităţi pe intervalul *[t, T]* generat de investiţia de o unitate monetară în bunuri capital la momentul *t*, care se depreciază în fiecare moment cu o rată *a*;

B: reprezintă fluxul de lichidităţi indirect al investiţiei. Dacă *I(t)* creşte cu o unitate monetară, venitul va creşte, iar limita restricţiei $(S(K(t))-I(t)-A'(I))$ va creşte, în valori prezente, cu $S'(K(s))e^{-a(s-t)}e^{-i(s-t)}$.

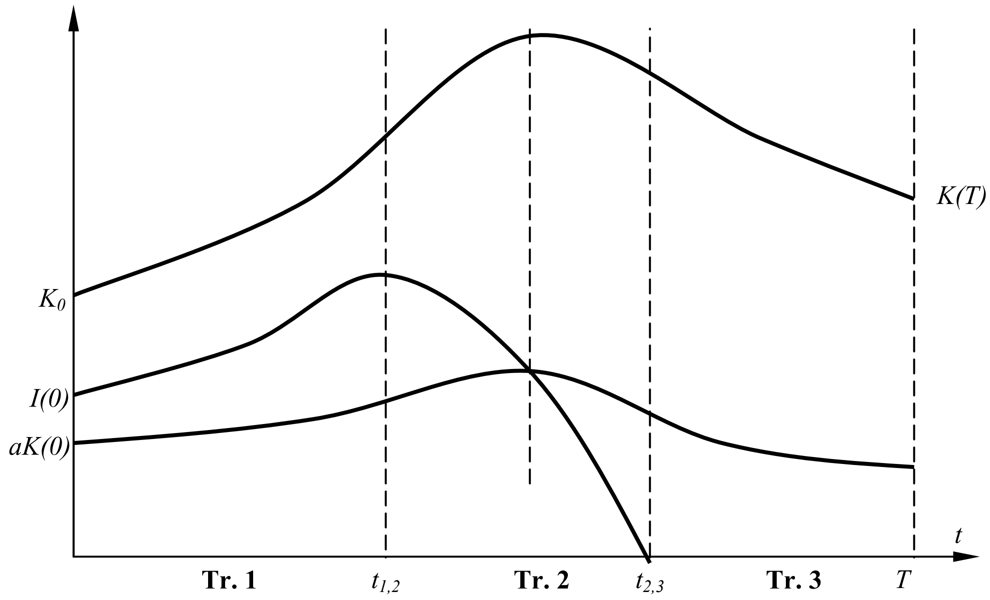
$\mu_1(t)$ arată creşterea valorii Lagrangeanului, dacă restricţia se relaxează cu o unitate monetară.

$\mu_1(t)S'(K(s))e^{-a(s-t)}e^{-i(s-t)}$ arată creşterea valorii Lagrangeanului când restricţia se relaxează (cu $S'(K(s))e^{-a(s-t)}e^{-i(s-t)}$).

C: valoarea rămasă (în valori prezente) a unei unităţi de bunuri capital, achiziţionată pe intervalul *[t, T]*, calculată în momentul *T*.

D: cheltuielile necesare la momentul *t*, pentru a creşte stocul de capital cu o unitate monetară.

A+B+C+D: beneficiul net actualizat al unei investiții de o unitate monetară, pe intervalul *[t, T]* şi deci VPN a investiției marginale.



Pe Tr 1, $\mu_1(t) > 0 \Rightarrow VPN > 0 \Rightarrow I(t) = \max \Rightarrow A'(I)$ creşte, întrucât $A''(I) > 0 \Rightarrow K(t)$ creşte şi $S'(K)$ descreşte, pentru ca $S''(K) < 0$; va rezulta că VPN va deveni la un moment dat zero şi firma comută pe Tr 2, unde $\mu_1(t) = 0$ şi va rămâne zero pe toată perioada.

Relația (31) devine:

$$(32) \qquad \int_t^T \underbrace{S'(K(s))e^{-(i+a)(s-t)}ds}_{A} + \underbrace{e^{-(i+a)(T-t)}}_{C} - \underbrace{(1 + A'(I))}_{D} = 0$$

Deoarece $VPN = 0 \Rightarrow$ investițiile nu mai cresc, ele încep să scadă. Stocul de capital va creşte în continuare, până când $I(t) = aK(t)$, după care începe să descrească.

Când *I(t)* ajunge zero, traiectoria comută pe Tr 3. Expresia VPN pe Tr 3 este (pe Tr 3, $\mu_1(t) = 0, \mu_2(t) > 0 \Rightarrow$ expresia lui VPN pe Tr 3 este dată de $\mu_2(t)$):

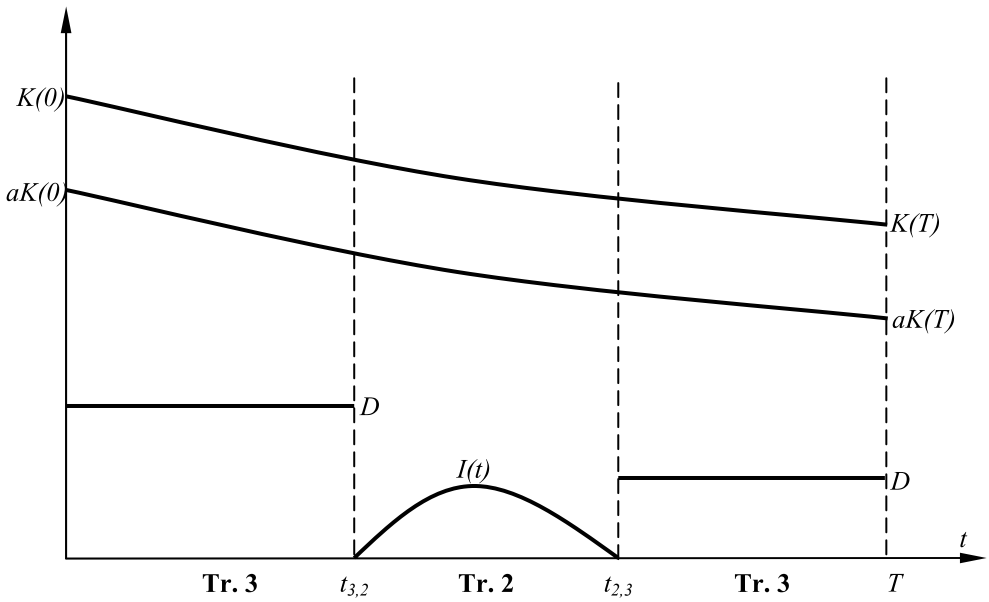
$$(33) \qquad -\mu_2(t) = \int_t^T S'(K(s))e^{-(i+a)(s-t)}ds + e^{-(i+a)(T-t)} - (1 + A'(I))$$

Din relaţia (33) se vede că VPN pe Tr 3 este negativă, deci firma nu va angaja în continuare investiţii. Aceasta se datorează faptului că din momentul $t_{2,3}$, până la sfârşitul perioadei *T*, timpul este prea scurt pentru a acoperi costurile de ajustare a noilor investiţii; cheltuielile marginale depăşesc fluxul marginal de lichidităţi şi este optimal pentru firmă să oprească investiţiile; în consecinţă, valoarea capitalului în *T* va fi mai mică decât în $t_{2,3}$.

Traiectoria de magistrală iii, $vpn_0 < 0$

Dacă $VPN_0 < 0$, firma demarează activitatea pe Tr 3, pe care nu investeşte nimic, în schimb va plăti dividende.

$I(t) = 0 \Rightarrow D(t) = S(K)$; stocul de capital va scădea şi venitul marginal (*S'(K)*) va creşte.



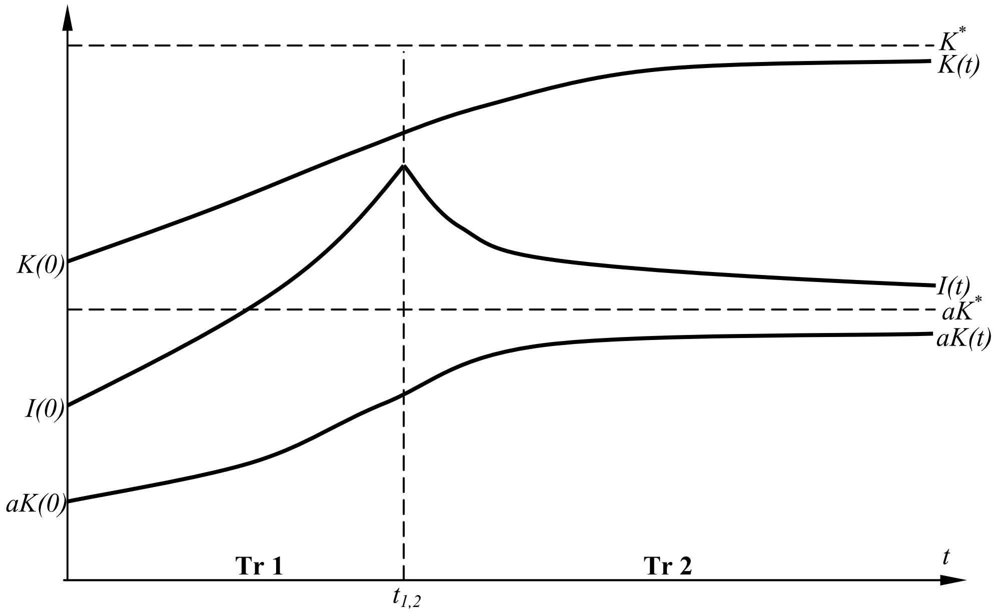
În momentul $t_{3,2}$, *S'(K)* a crescut suficient astfel încât $VPN = 0 \Rightarrow$ este indiferent dacă *I(t) > 0* sau *I(t) = 0*; deci *I(t)* creşte, dar pe perioada Tr 2 investiţia nu atinge nivelul de înlocuire, astfel încât *K(t)* continuă să scadă pe Tr 2. Întrucât pe Tr 2, *VPN = 0*, *I(t)* începe din nou să scadă, până ajunge la zero, când se comută pe Tr 3.

Scăderea investiţiilor pe Tr 2 se datorează faptului că capacitatea de acumulare a firmei este prea mică pentru a acoperi costurile mari de investiţii, iar intervalul de timp până la T este prea mic pentru a se recupera cheltuielile de investiţii.

Pe Tr 3, $VPN < 0$, deci nu se investeşte, se plătesc dividende şi capitalul scade.

Cazul în care $T\to\infty$ (T este foarte mare)

a) $VPN_0 > 0$



Firma nu va mai comuta pe Tr 3.

Pe Tr 2, investiţiile tind către nivelul de depreciere, iar creşterea capitalului va fi dată de mecanismul acceleratorului flexibil:

$$\dot{K}(t) = a[K^* - K(t)]$$

Valoarea staţionară K^* este dată de relaţia:

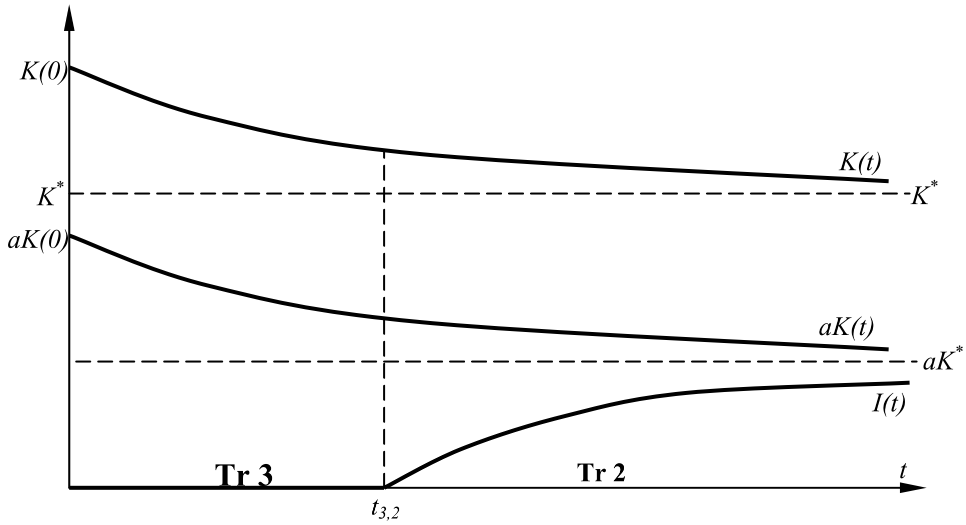
$$S'(K^*) = (i+a)(1+A'(K^*))$$

Relaţia de mai sus este derivată din condiţia ca costul marginal al unei unităţi de bun capital pentru nivelul dorit K^* să fie egal cu venitul marginal al unei unităţi de bun capital pe intervalul $[t, \infty]$:

$$1 + A'(K^*) = \int_t^{\infty} S'(K^*) e^{-(i+a)(s-t)} ds$$

b) $VPN_0 < 0$, $T\to\infty$

Traiectoria de magistrală nu mai comută pe Tr 3; Tr 2 va fi cea finală.



Pe Tr 2, sporul capitalului urmează mecanismul accelerator flexibil, iar punctul staţionar se atinge asimptotic.

Demonstraţia VPN

VPN pe traiectoria 2:

Din condiţiile de optim: $\mu_1(t)=0$, $\mu_2(t)=0$

$(25)\Rightarrow \dot{\lambda}(t)=-S'(K)+(i+a)\lambda(t)$, ecuaţie liniară de ordinul I, a cărei soluţie este:

$$(*)\lambda(t)=\int_t^T S'(K(s))e^{-(i+a)(s-t)}ds+e^{-(i+a)(T-t)}$$

Pe traiectoria 2:

$$\lambda(t)=1+A'(I)\Rightarrow 1+A'(I)=\int_t^T S'(K(s))e^{-(i+a)(s-t)}ds\Rightarrow$$

$$\int_t^T S'(K(s))e^{-(i+a)(s-t)}ds-(1+A'(I))=0$$

este expresia VPN pe traiectoria 2.

VPN pe traiectoria 1:

Din condiţiile de optim: $\mu_1(t)>0$, $\mu_2(t)=0$

$\dot{\lambda}(t)=-S'(K)(1+\mu_1(t))+(i+a)\lambda(t)$

Integrăm relaţia de mai sus între momentele de timp t şi $t_{1,2}$, întrucât în $t_{1,2}$, firma comută pe traiectoria 2:

$$\lambda(t) = \int_t^{t_{1,2}} S'(K(s))e^{-(i+a)(s-t)}ds + e^{-(i+a)(t_{1,2}-t)}\lambda(t_{1,2})$$

Calculăm $\lambda(t_{1,2})$ cu ajutorul relației $(*)$ şi introducem în relația de mai sus:

$$\lambda(t) = \int_t^T S'(K(s))e^{-(i+a)(s-t)}ds + \int_t^T S'(K(s))e^{-a(s-t)}\mu_1(s)e^{-i(s-t)}ds$$
$$+ e^{-(i+a)(T-t)} - (1 + A'(I))$$

Pe traiectoria 1: $\mu_1(t) > 0$, $\mu_2(t) = 0 \Rightarrow \lambda(t) = (1 + A'(I))(1 + \mu_1(t))$

Înlocuim $\lambda(t)$ în expresia de mai sus:

$$(1 + A'(I))\mu_1(t) = \int_t^T S'(K(s))e^{-(i+a)(s-t)}ds +$$
$$+ \int_t^T S'(K(s))e^{-a(s-t)}\mu_1(s)e^{-i(s-t)}ds + e^{-(i+a)(T-t)} - (1 + A'(I))$$

care este relația VPN pe traiectoria 1.