Modelul Ludwig

Obiectivul modelului Ludwig este maximizarea fluxului (încasărilor) de dividende pe orizontul limitat de timp [0,T] în valoare actualizată:

$$\max_{I,F} J = \int_0^T e^{-it} D(t)dt + e^{-iT} X(T) \tag{1}$$

Vom considera că evoluţia capitalului are o dinamică clasică:

$$\dot{K}(t) = I(t) - a \cdot K(t) \tag{2}$$

unde a = coeficientul de depreciere = coeficientul de amortizare

Structura capitalului va fi:

$$K(t) = X(t) + Y(t) \tag{3}$$

unde $X(t)$ reprezintă volumul acţiunilor (capitalul social) iar $Y(t)$ volumul datoriilor (împrumuturilor) la momentul t.

Dinamica împrumuturilor este:

$$\dot{Y}(t) = F(t) - b \cdot Y(t) \tag{4}$$

unde: $F(t)$ = volumul creditelor

b = cota de rambursare anuală a datoriilor(amortismentul).

Vom presupune în continuare că se verifică ***ipoteza Ludwig*: b = a**

În aceste condiţii, din relaţia (3) se obţine, prin derivare, dinamica structurii capitalului:

$$\dot{K}(t) = \dot{X}(t) + \dot{Y}(t) \tag{3'}$$

de unde rezultă succesiv dinamica valorii acţiunilor(capitalului social):

$$\dot{X}(t) = \dot{K}(t) - \dot{Y}(t) \Leftrightarrow$$

$$\dot{X}(t) = I(t) - a \cdot K(t) - F(t) + b \cdot Y(t) \Leftrightarrow$$

$$\dot{X}(t) = I(t) - a \cdot (X(t) + Y(t)) - F(t) + b \cdot Y(t)$$

şi în final, ţinând cont de ipoteza Ludwig(a = b), rezultă:

$$\dot{X}(t) = I(t) - a\cdot X(t) - F(t) \tag{5}$$

Vom considera că profitul net este ceea ce mai rămâne din venitul brut ($R(K(t))$ = cifra de afaceri minus costurile cu factorii variabili, inclusiv costurile salariale) după ce se scad costurile cu factorii ficşi (amortizarea capitalului = $a\cdot K(t)$ şi dobânzile la datorii = $r\cdot Y(t)$):

$$V(t) = R(K(t)) - a\cdot K(t) - r\cdot Y(t) \tag{6}$$

unde r = rata (normală) a dobânzii (lucrăm in ***ipoteza*** $r \neq i$).

Venitul net obținut va fi utilizat pentru plata acționarilor (ca dividende $D(t)$) şi creşterea capitalului social $X(t)$:

$$V(t) = D(t) + \dot{X}(t) \tag{7}$$

Dacă $m \in (0,1)$ este cota parte din profitul net reținută pentru dezvoltare atunci cerința acționarilor ca dividendele să fie strict pozitive se traduce prin:

$$D(t) \geq (1 - m)\cdot V(t) > 0 \tag{8}$$

Conform acestei cerințe, creşterea capitalului social este limitată superior:

$$\dot{X}(t) = V(t) - D(t) \leq V(t) - (1 - m)\cdot V(t) = m\cdot V(t)$$

adică:

$$\dot{X}(t) \leq m\cdot V(t) \tag{8'}$$

Conform (5), cererea de investiții se calculează cu relația:

$$I(t) = \dot{X}(t) + a\cdot X(t) + F(t) \tag{9}$$

şi ținând cont de (8'), obținem marginea superioară a acesteia:

$$I(t) \leq m\cdot V(t) + a\cdot X(t) + F(t) \tag{10}$$

sau, conform (6):

$$I(t) \leq m\cdot(R(K(t)) - a\cdot K(t) - r\cdot Y(t)) + a\cdot X(t) + F(t) \tag{10'}$$

Dacă se face ipoteza: $I(t) \geq 0$ (nu se admite dezinvestiția), atunci din ecuația de dinamică (2) rezultă:

$$\dot{K}(t) \geq -a\cdot K(t) \text{ sau } \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} \geq -a$$

ceea ce arată că ***rata de creştere*** a capitalului poate fi şi ***negativă***, fiind deci posibilă şi descreşterea capitalului (decapitalizarea).

Condiţiile de creditare se impun prin restricţiile:

$$0 \leq F(t) \leq \gamma \cdot I(t) \tag{11}$$

unde $\gamma = \dfrac{F(t)}{I(t)}$ este cota maximă a creditelor pentru investiţii (în raport cu facilităţile sistemului bancar).

Observaţie: Dacă cerinţa (11) este verificată, atunci automat I(t) ≥ 0 şi această restricţie ***nu mai apare ca efectivă***.

Pornind de la relaţiile (7) şi (5) şi ţinând cont de relaţia (6) obţinem:

$$(7) \Rightarrow D(t) = V(t) - \dot{X}(t) \overset{(5)}{\Rightarrow} D(t) = V(t) - I(t) + \mathrm{a}\cdot X(t) + F(t) \overset{(6),(3)}{\Rightarrow}$$

$$D(t) = R(K(t)) - (\mathrm{a} + \mathrm{r})\cdot Y(t) - I(t) + F(t) \tag{12}$$

care reprezintă ***ecuaţia dividendelor*** pe baza căreia obţinem funcţia obiectiv:

$$\max_{I,F} \mathrm{J} = \int_0^T e^{-it} \cdot (R(K(t)) - (\mathrm{a} + \mathrm{r})\cdot Y(t) - I(t) + F(t))dt + e^{-iT}\,\mathrm{X(T)} \quad (1')$$

Vom considera că funcţia de venit $R(t)$ verifică şi condiţiile:

i) $\dfrac{\partial R(t)}{\partial K(t)} > \mathrm{a}$

ii) $\dfrac{\partial^2 R(t)}{\partial^2 K(t)} < 0$

prima condiţie rezultând din restricţia $R(K(t)) > \mathrm{a}\cdot K(t)$ care spune că veniturile trebuie să acopere cel puţin costurile cu factorii variabili şi cei ficşi iar a doua reprezintă legea randamentelor marginale descrescătoare.

Variabilele modelului sunt:

- variabile de stare: $X(t)$ şi $Y(t)$
- variabile de decizie: $I(t)$ şi $F(t)$
- variabile de ieşire: $K(t)$, $V(t)$ şi $D(t)$

Modelul matematic este:

$$\max_{I(t),F(t)} \text{J} = \int_0^T e^{-it} \cdot (R(K(t)) - (\text{a} + \text{r})\cdot Y(t) - I(t) + F(t))dt + e^{-iT}\,\text{X(T)}$$

$$\dot{X}(t) = I(t) - \text{a}\cdot X(t) - F(t) \qquad X(0) = X_0$$

$$\dot{Y}(t) = F(t) - \text{a}\cdot Y(t) \qquad Y(0) = Y_0$$

$$K(t) = X(t) + Y(t)$$

$$I(t) \le \text{m}\cdot(R(K(t)) - \text{a}\cdot K(t) - \text{r}\cdot Y(t)) + \text{a}\cdot X(t) + F(t)$$

$$0 \le F(t) \le \gamma\cdot I(t)$$

$$\text{m} \in (0,1)\ ;\ \gamma \in (0,1)$$

şi reprezintă o problemă de control optimal. Pentru **rezolvarea** acesteia vom utiliza ***principiul lui Pontreaghin***.

Deoarece funcţia obiectiv (1') este cu actualizare (apare e^{-it}) construim ***hamiltonianul*** ajustat (fără actualizare):

$$H(X(t),Y(t),I(t),F(t),\Psi_1(t),\Psi_2(t)) = R(K(t)) - (\text{a} + \text{r})\cdot Y(t) - I(t) + F(t) + \Psi_1(t)\cdot[I(t) - \text{a}\cdot X(t) - F(t)] + \Psi_2(t)\cdot[F(t) - \text{a}\cdot Y(t)] \tag{14}$$

unde variabilele adjuncte sunt exprimate în acest caz prin transformata:

$$\Psi_j(t) = \text{e}^{it}\cdot\lambda_j(t)$$

$\lambda_j(t)$ fiind variabilele adjuncte corespunzătoare hamiltonianului $H(\cdot)$ care conţin termenul de actualizare e^{-it}, variabile despre care se ştie că verifică ecuaţiile de dinamică:

$$\dot{\lambda}_1(t) = -\frac{\partial H(\cdot)}{\partial X} \quad \text{şi} \quad \dot{\lambda}_2(t) = -\frac{\partial H(\cdot)}{\partial Y}$$

de unde rezultă:

$$\dot{\Psi}_1(t) = i\cdot\Psi_1(t) - e^{it}\cdot\frac{\partial H(\cdot)}{\partial X} \quad \text{şi} \quad \dot{\Psi}_2(t) = i\cdot\Psi_2(t) - e^{it}\cdot\frac{\partial H(\cdot)}{\partial Y} \tag{16}$$

sau, mai general, teorema:

Teoremă: Dacă $X(t)$ este vectorul variabilelor de stare şi $H(\cdot)$ este hamiltonianul asociat unei probleme de control optimal fără restricţii atunci variabilele adjuncte $\Psi(t)$ folosite în construcţia hamiltonianului, prin excluderea factorului de actualizare (e^{-it}) din funcţia-obiectiv, verifică ecuaţia de dinamică:

$$\dot{\Psi}(t) = i\cdot\Psi(t) - e^{it}\cdot\frac{\partial H(\cdot)}{\partial X} = i\cdot\Psi(t) - \frac{\partial H_{ajustat}(\cdot)}{\partial X} \quad \text{unde } \text{H(t)} = e^{-it}\cdot \text{H}_{\text{ajustat}}\text{(t)}.$$

Dacă există şi restricţii asupra variabilelor, ca în cazul de faţă restricţiile:

$$\begin{cases} K(t) = X(t) + Y(t) \\ I(t) \le \mathrm{m}\cdot(R(K(t)) - \mathrm{a}\cdot K(t) - \mathrm{r}\cdot Y(t)) + \mathrm{a}\cdot X(t) + F(t) \\ 0 \le F(t) \le \gamma\cdot I(t) \end{cases}$$

atunci definim ***Lagrangeanul*** asociat problemei:

$$L(\cdot) = H(\cdot) + \mu_1(t)\cdot[\gamma\cdot I(t) - F(t)] + \mu_2(t)\cdot[m\cdot(R(K(t)) - \mathrm{a}\cdot K(t) - \mathrm{r}\cdot Y(t)) + \mathrm{a}\cdot X(t) + F(t) - I(t)] + \mu_3(t)\cdot F(t) \tag{15}$$

unde $\mu_2(t)$ este multiplicatorul asociat restricţiei asupra variabilei de decizie $I(t)$ iar $\mu_1(t)$ şi $\mu_3(t)$ multiplicatorii asociaţi restricţiilor asupra variabilei de decizie $F(t)$ şi ecuaţiile de dinamică (16) trebuie înlocuite cu ecuaţiile:

$$\begin{cases} \dot{\Psi}_1(t) = i\cdot \Psi_1(t) - e^{it}\cdot \dfrac{\partial L(\cdot)}{\partial X} \\ \\ \dot{\Psi}_2(t) = i\cdot \Psi_2(t) - e^{it}\cdot \dfrac{\partial L(\cdot)}{\partial Y} \end{cases} \tag{16}$$

Sistemul de condiţii Kuhn-Tucker se reduce la condiţiile:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(\cdot)}{\partial I} = 0 & (17.a) \\ \\ \dfrac{\partial L(\cdot)}{\partial F} = 0 & (17.b) \end{cases}$$

şi:

$$\begin{cases} \mu_1\cdot[\gamma\cdot I - F] = 0 & (18.a) \\ \\ \mu_2\cdot[m\cdot(R(K) - \mathrm{a}\cdot K - \mathrm{r}\cdot Y) + \mathrm{a}\cdot X + F - I] = 0 & (18.b) \\ \\ \mu_3\cdot F = 0 & (18.c) \end{cases}$$

care este un sistem de 5 ecuaţii cu necunoscutele I, F, μ_1, μ_2, μ_3 din care vom scoate variabilele de decizie I şi F în funcţie de variabilele de stare X şi Y şi de variabilele adjuncte Ψ_1 şi Ψ_2.

În cazul de faţă, sistemul condiţiilor Kuhn-Tucker are forma:

$$SKT:\begin{cases} -1 + \Psi_1 + \gamma\cdot\mu_1 - \mu_2 = 0 & (17'.a) \\ 1 - \Psi_1 + \Psi_2 - \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0 & (17'.b) \\ \mu_1\cdot[\gamma\cdot I - F] = 0 & (18.a) \\ \mu_2\cdot[m\cdot(R(K) - a\cdot K - r\cdot Y) + a\cdot X + F - I] = 0 & (18.b) \\ \mu_3\cdot F = 0 & (18.c) \end{cases}$$

şi restricţiile de semn: $\mu_1(t),\mu_2(t),\mu_3(t),I(t),F(t) \geq 0$

În final, variabilele de stare $X(t)$ şi $Y(t)$ vor fi găsite din sistemul de ecuaţii diferenţiale format din ecuaţiile de dinamică ale variabilelor de stare (4) şi (5) la care se adaugă ecuaţiile de dinamică ale variabilelor adjuncte, rezultând un sistem *SD* de 4 ecuaţii diferenţiale cu 4 necunoscute ($X(t)$, $Y(t)$, $\Psi_1(t)$, $\Psi_2(t)$):

$$SD:\begin{cases} \dot{Y}(t) = F(t) - a\cdot Y(t) & (4) \\ \dot{X}(t) = I(t) - a\cdot X(t) - F(t) & (5) \\ \dot{\Psi}_1(t) = i\cdot \Psi_1(t) - \dfrac{\partial L(\cdot)}{\partial X} = & \\ = -\dfrac{\partial R}{\partial K}(t) + (i + a)\cdot \Psi_1(t) - \mu_2(t)\cdot[m\cdot \dfrac{\partial R(\cdot)}{\partial K}(t) + a\cdot(1 - m)] & (16.a) \\ \dot{\Psi}_2(t) = i\cdot \Psi_2(t) - \dfrac{\partial L(\cdot)}{\partial Y} = & \\ = (i + a)\cdot \Psi_2(t) - \dfrac{\partial R(\cdot)}{\partial K}(t)\cdot[1 + m\cdot\mu_2(t)] + (a + r)\cdot[1 + m\cdot\mu_2(t)] & (16.b) \end{cases}$$

cu valorile iniţiale $X(0) = X_0$, $Y(0) = Y_0$ plus valorile finale:

$$\Psi_1(T) = 1 \text{ şi } \Psi_2(T) = 0 \qquad (16.c)$$

Observaţie: În formulele in sistem am folosit faptul că:

$$\frac{\partial R(\cdot)}{\partial X} = \frac{\partial R(\cdot)}{\partial K}\cdot\frac{\partial K(\cdot)}{\partial X} = \frac{\partial R(\cdot)}{\partial K}\cdot\frac{\partial (X+Y)}{\partial X} = \frac{\partial R(\cdot)}{\partial K}$$

$$\frac{\partial R(\cdot)}{\partial Y} = \frac{\partial R(\cdot)}{\partial K} \cdot \frac{\partial K(\cdot)}{\partial Y} = \frac{\partial R(\cdot)}{\partial K} \cdot \frac{\partial (X+Y)}{\partial Y} = \frac{\partial R(\cdot)}{\partial K}$$

Revenind la sistemul de condiţii Kuhn-Tucker, deoarece fiecare din ultimele trei ecuaţii implică 2 cazuri ($\mu_i = 0$ sau $\mu_i \neq 0$, i = 1,2,3) rezolvarea sistemului presupune analiza a $2^3 = 8$ **variante**, care pot fi sintetizate conform tabelului de mai jos:

Varianta	μ_1	μ_2	μ_3
I	+	+	+
II	+	+	0
III	+	0	+
IV	0	+	+
V	0	0	+
VI	0	+	0
VII	+	0	0
VIII	0	0	0

În continuare vom analiza succesiv fiecare variantă (traiectorie).

Varianta I: $\mu_1(t), \mu_2(t), \mu_3(t) > 0$

Din condiţiile Kuhn-Tucker rezultă:

$$\begin{cases} \gamma \cdot I(t) - F(t) = 0 & \text{(18.a.I)} \\ m \cdot \mathrm{V}(t) + \mathrm{a} \cdot X(t) + F(t) - I(t) = 0 & \text{(18.b.I)} \\ F(t) = 0 & \text{(18.c.I)} \end{cases}$$

de unde:

$$I(t) = F(t) = 0 \qquad \text{(18'.a.I) şi (18'.c.I)}$$

şi:

$$m \cdot \mathrm{V}(t) + \mathrm{a} \cdot X(t) = 0 \qquad \text{(18'.b.I)}$$

Ultima relaţie fiind în contradicţie cu ipotezele a, $m \in (0,1)$ şi V(t), $X(t) > 0$, rezultă că această variantă nu este posibilă sau că ***traiectoria corespunzătoare nu este admisibilă***.

Varianta II: $\mu_1(t), \mu_2(t) > 0$ şi $\mu_3(t) = 0$

Sistemul de condiţii Kuhn-Tucker devine:

$$\begin{cases} \gamma\cdot I(t) - F(t) = 0 & (18.a.II) \\ m\cdot \mathrm{V}(t) + \mathrm{a}\cdot X(t) + F(t) = I(t) & (18.b.II) \end{cases}$$

Prima relație spune că firma face ***împrumuturi la nivel maxim.*** Cele două ecuații formează un sistem liniar de 2 ecuații cu 2 necunoscute ($F(t)$ şi $I(t)$), cu soluția:

$$\begin{cases} F^*(t) = \dfrac{\gamma}{1-\gamma}[m\cdot \mathrm{V}(t) + \mathrm{a}\cdot X(t)] & (18'.a.II) \\ I^*(t) = \dfrac{1}{1-\gamma}[m\cdot \mathrm{V}(t) + \mathrm{a}\cdot X(t)] & (18'.b.II) \end{cases}$$

Prima arată care este ***politica de credite*** şi evident $F(t) \geq 0$ iar a doua care este ***nivelul investițiilor*** şi de asemenea $I(t) \geq 0$.

Înlocuind aceste soluții în sistemul dinamic *SD* obținem:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = m\cdot V(t) = m\cdot(R(K(t)) - \mathrm{a}\cdot K(t) - \mathrm{r}\cdot Y(t)) & (5.II) \\ \dot{Y}(t) = \dfrac{\gamma}{1-\gamma}\{m\cdot[R(K(t)) - \mathrm{a}\cdot K(t) - \mathrm{r}\cdot Y(t)] + \mathrm{a}\cdot X(t)\} - \mathrm{a}\cdot Y(t) & (4.II) \end{cases}$$

unde $K(t) = X(t) + Y(t)$.

Soluția acestui sistem depinde de forma funcției de venit $R(t)$.

Deoarece $V(t) > 0$ şi $m \in (0,1)$ rezultă: $\dot{X}(t) > 0$ deci ***capitalul social va creşte*** $X(t)\uparrow$. Din (18'.a.II) şi $X(t)\uparrow$ rezultă $F(t)\uparrow$ şi de aici $Y(t)\uparrow$ adică pe traiectoria II datoria firmei creşte.

De asemenea, cum şi X(t) şi Y(t) sunt crescătoare K(t) va fi de asemenea crescător şi $\dot{K}(t) \geq 0$, firma înregistrând o ***creştere maximă***, prin politica de împrumuturi maxime posibile.

Dinamică variabilelor adjuncte rezultă din ultimele două ecuații ale SD:

$$\begin{cases} \dot{\Psi}_1(t) = -\dfrac{\partial R}{\partial K}(t) + (i + \mathrm{a})\cdot \Psi_1(t) - \mu_2(t)\cdot[m\cdot \dfrac{\partial R(\cdot)}{\partial K}(t) + a\cdot(1-m)] & (16.a) \\ \dot{\Psi}_2(t) = (i + \mathrm{a})\cdot \Psi_2(t) - \dfrac{\partial R(\cdot)}{\partial K}(t)\cdot[1 + m\cdot\mu_2(t)] + (\mathrm{a} + \mathrm{r})\cdot[1 + m\cdot\mu_2(t)] & (16.b) \end{cases}$$

Din condițiile K-T 17'.a şi 17'.b rezultă:

$$\begin{cases} \Psi_1 = 1 - \gamma \cdot \mu_1 + \mu_2 & (17'.a.II) \\ \Psi_2 = (1 - \gamma) \cdot \mu_2 & (17'.b.II) \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} \mu_1 = \frac{1}{\gamma}[1 - \Psi_1(t)] + \frac{1}{\gamma(1-\gamma)} \cdot \Psi_2(t) & (17''.a.II) \\ \mu_2 = \frac{1}{1-\gamma} \cdot \Psi_2(t) & (17''.b.II) \end{cases}$$

şi în final:

$$\begin{cases} \dot{\mu}_1 = \frac{1}{\gamma}[1 - \dot{\Psi}_1(t)] + \frac{1}{\gamma(1-\gamma)} \cdot \dot{\Psi}_2(t) & (17'''.a.II) \\ \dot{\mu}_2 = \frac{1}{1-\gamma} \cdot \dot{\Psi}_2(t) & (17'''.b.II) \end{cases}$$

Ultimele relații, în combinație cu ecuațiile de dinamică ale variabilelor adjuncte 16.a şi 16.b duc la un sistem de două ecuații diferențiale liniare cu coeficienți neconstanți, cu două necunoscute, din care vor fi aflate $\Psi_1(t)$, $\Psi_2(t)$ şi apoi $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$:

$$\begin{cases} \dot{\Psi}_1(t) = (i + \mathrm{a}) \cdot \Psi_1(t) - \frac{1}{1-\gamma} \cdot [m \cdot \frac{\partial R(\cdot)}{\partial K}(t) + a \cdot (1 - m)] \cdot \Psi_2(t) - \frac{\partial R}{\partial K}(t) & (16.a) \\ \dot{\Psi}_2(t) = [i + \mathrm{a} + m \cdot \frac{1}{1-\gamma} \cdot (\mathrm{a} + \mathrm{r} - \frac{\partial R(\cdot)}{\partial K}(t))] \cdot \Psi_2(t) + (\mathrm{a} + \mathrm{r}) - \frac{\partial R(\cdot)}{\partial K}(t) & (16.b) \end{cases}$$

Ultima ecuație este o ecuație liniară de gradul întâi în $\Psi_2(t)$ de unde rezultă:

$$\Psi_2^*(t) = \int_0^t [a + r - \frac{\partial R(\cdot)}{\partial K}(\tau)] \cdot e^{-\int_0^\tau i+a+m \cdot \frac{1}{1-\gamma} \cdot [a+r-\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K}(u)]du} d\tau \cdot e^{\int_0^t i+a+m \cdot \frac{1}{1-\gamma} \cdot [a+r-\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K}(\tau)]d\tau}$$

apoi:

$$\Psi_1^*(t) = \int_0^t [-\frac{1}{1-\gamma} \cdot [m \cdot \frac{\partial R(\cdot)}{\partial K}(\tau) + a(1-m)] \cdot \Psi_2^*(\tau) - \frac{\partial R(\cdot)}{\partial K}(\tau)] \cdot e^{-(i+a) \cdot \tau} d\tau \cdot e^{(i+a) \cdot t}$$

şi în final:

$$\mu_1^*(t) = \frac{1}{\gamma}[1 - \Psi_1^*(t)] + \frac{1}{\gamma(1-\gamma)} \cdot \Psi_2^*(t)$$

$$\mu_2^*(t) = \frac{1}{1-\gamma} \cdot \Psi_2^*(t)$$

Pentru ca soluția să fie admisibilă este necesar ca $\mu_1^*(t)$ şi $\mu_2^*(t)$ să fie pozitive, dar acest fapt poate fi decis numai după alegerea concretă a lui R(K).

Varianta III. $\mu_1(t) > 0$, $\mu_2(t) = 0$ şi $\mu_3(t) > 0$

Condițiile K-T devin:

$$SKT: \begin{cases} -1 + \Psi_1 + \gamma \cdot \mu_1 = 0 & (17'.a.III) \\ 1 - \Psi_1 + \Psi_2 - \mu_1 + \mu_3 = 0 & (17'.b.III) \\ \mu_1 > 0,\ \gamma \cdot I - F = 0 & (18.a.III) \\ \mu_2 = 0,\ m \cdot (R(K) - a \cdot K - r \cdot Y) + a \cdot X + F - I > 0 & (18.b.III) \\ \mu_3 > 0,\ F = 0 & (18.c.III) \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem obținem I(t) = F(t) = 0 oricare ar fi t, deci firma aplică o politică de ***neapelare*** la credite şi de ***investiții nule*** (nu se face nici autofinanțare). Din ecuația de evoluție a capitalului (2) obținem

$$\dot{K}(t) = -a \cdot K(t) \qquad (2.III)$$

deci o ***evoluție descrescătoare*** ($\dot{K}(t) < 0$) a ***datoriilor firmei***:

$$K^*(t) = K_0 \cdot e^{-at} \qquad (2'.III)$$

Ecuațiile de dinamică devin:

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = -a \cdot Y(t) & (4.III) \\ \dot{X}(t) = -a \cdot X(t) & (5.III) \\ \dot{\Psi}_1(t) = -\dfrac{\partial R}{\partial K}(t) + (i + a) \cdot \Psi_1(t) & (16.a.III) \\ \dot{\Psi}_2(t) = (i + a) \cdot \Psi_2(t) - \dfrac{\partial R(\cdot)}{\partial K}(t) + (a + r) & (16.b.III) \end{cases}$$

Din primele două ecuaţii rezultă o evoluţie concomitent descrescătoare a împrumuturilor şi a acţiunilor ($\dot{Y}(t) < 0$ şi $\dot{X}(t) < 0$) pe traiectoriile:

$$Y^*(t) = Y_0 \cdot e^{-at} \tag{5'.III}$$

$$X^*(t) = X_0 \cdot e^{-at} \tag{4'.III}$$

şi în final volumul dividendelor:

$$D(t) = R(K^*(t)) - (a + r) \cdot Y^*(t) \tag{12.V}$$

Varianta IV. $\mu_1(t) = 0$, $\mu_2(t) > 0$ şi $\mu_3(t) > 0$

Condiţiile K-T devin:

$$SKT: \begin{cases} -1 + \Psi_1 - \mu_2 = 0 & (17'.a.IV) \\ 1 - \Psi_1 + \Psi_2 + \mu_2 + \mu_3 = 0 & (17'.b.IV) \\ \mu_1 = 0,\ \gamma \cdot I - F > 0 & (18.a.IV) \\ \mu_2 > 0,\ m \cdot (R(K) - a \cdot K - r \cdot Y) + a \cdot X + F - I = 0 & (18.b.IV) \\ \mu_3 > 0,\ F(t) = 0 & (18.c.IV) \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem obţinem:

$$SKT: \begin{cases} \Psi_1 = 1 + \mu_2 \Rightarrow \dot{\Psi}_1(t) = \dot{\mu}_2(t) & (17''.a.IV) \\ \Psi_2 = -\mu_3 \Rightarrow \dot{\Psi}_2(t) = -\dot{\mu}_3(t) & (17''.b.IV) \\ \mu_1 = 0,\ \gamma \cdot I > 0 \Rightarrow I > 0 & (18'.a.IV) \\ \mu_2 > 0,\ I = m \cdot (R(K) - a \cdot K - r \cdot Y) + a \cdot X & (18'.b.IV) \\ \mu_3 > 0,\ F(t) = 0 & (18'.c.IV) \end{cases}$$

Pe această traiectorie se aplică deci o politică ***fără credite*** (18'.c.IV) şi există investiţii (18'.a.IV), care vor fi făcute din surse proprii (***autofinanţare***). Numim această politică "***autofinanţare pură***".

Înlocuind rezultatele de mai sus în ecuaţiile de dinamică obţinem sistemul:

$$
\begin{cases}
\dot{Y}(t) = -\,\mathrm{a}\cdot Y(t) & (4.\mathrm{IV}) \\
\dot{X}(t) = m\cdot(R(K) - \mathrm{a}\cdot K - \mathrm{r}\cdot Y(t)) & (5.\mathrm{IV}) \\
\dot{\mu}_2(t) = -\dfrac{\partial R}{\partial K}(t) + (i+\mathrm{a})\cdot(1+\mu_2(t)) - \mu_2(t)\cdot[m\cdot\dfrac{\partial R(\cdot)}{\partial K}(t) + a\cdot(1-m)] & (16.\mathrm{a.IV}) \\
\dot{\mu}_3(t) = (i+\mathrm{a})\cdot\mu_3(t) + \dfrac{\partial R(\cdot)}{\partial K}(t)\cdot[1 + m\cdot\mu_2(t)] - (\mathrm{a}+\mathrm{r})\cdot[1 + m\cdot\mu_2(t)] & (16.\mathrm{b.IV})
\end{cases}
$$

cu condițiile finale: $X(0) = X_0$, $Y(0) = Y_0$, $\mu_2(\mathrm{T}) = 0$ şi $\mu_3(\mathrm{T}) = 0$.

Din ecuația liniară de gradul I cu coeficienți neconstanți (16.a.IV) va fi obținut multiplicatorul $\mu_2(t)$, care va fi înlocuit apoi în ecuația (16.b.IV) care va deveni o ecuație liniară de gradul I cu coeficienți neconstanți în $\mu_3(t)$. Evoluția pe traiectoria IV are loc atât timp cât $\mu_2(t)$ şi $\mu_3(t)$ sunt simultan pozitivi.

Din ecuația (4.IV) obținem o ***evoluție descrescătoare*** ($\dot{Y}(t) < 0$) a ***datoriilor firmei***:

$$Y^*(t) = \mathrm{Y}_0\cdot e^{-\mathrm{a}t} \qquad (4'.\mathrm{IV})$$

Din ecuația (5.IV) rezultă ***dinamica volumului acțiunilor***: Avem:

$$\dot{X}(t) = m\cdot\mathrm{V(t)} > 0 \Rightarrow \mathrm{X}(t)\uparrow \qquad (5'.\mathrm{IV})$$

iar evoluția acțiunilor poate fi dedusă din ecuația:

$$\dot{X}(t) = m\cdot(R(K) - \mathrm{a}\cdot K - \mathrm{r}\cdot Y(t)) \qquad (5.\mathrm{IV})$$

şi depinde de forma funcției profitului $R(K)$.

Cum $\mathrm{K}(t) = X(t) + Y(t)$ şi $R(\mathrm{K})$ este neliniară, expresia lui $X(t)$ este greu de determinat analitic. În acest caz se folosesc de obicei aproximările acestei funcții prin simulări discrete pe calculator.

Varianta V. $\mu_1(\mathrm{t}) = 0$, $\mu_2(\mathrm{t}) = 0$ şi $\mu_3(\mathrm{t}) > 0$

Condițiile K-T devin:

$$
SKT: \begin{cases}
-1 + \Psi_1 = 0 & (17'.\mathrm{a.V}) \\
1 - \Psi_1 + \Psi_2 + \mu_3 = 0 & (17'.\mathrm{b.V}) \\
\mu_1 = 0,\ \gamma\cdot I - F > 0 & (18.\mathrm{a.V}) \\
\mu_2 = 0,\ m\cdot(R(K) - \mathrm{a}\cdot K - \mathrm{r}\cdot Y) + \mathrm{a}\cdot X + F - I > 0 & (18.\mathrm{b.V}) \\
\mu_3 > 0,\ F(t) = 0 & (18.\mathrm{c.V})
\end{cases}
$$

Ultima relație arată că firma acceptă o ***politică fără credite***.

Din a treia rezultă $\gamma \cdot I > 0$ deci $I > 0$ iar din a patra $m \cdot \mathrm{V}(t) + \mathrm{a} \cdot X - I > 0$. În concluzie:

$$0 < I(t) < m \cdot \mathrm{V}(t) + \mathrm{a} \cdot X(t) \qquad (18'.b.V)$$

deci firma face investiții, sursa lor fiind autofinanțarea, limita superioară a investițiilor fiind partea din profit destinată dezvoltării plus amortizarea părții din capital definită prin capital social.

Din primele două ecuații vom avea:

$$\begin{cases} \Psi_1(t) = 1 \Rightarrow \dot{\Psi}_1(t) = 0 & (17''.a.V) \\ \Psi_2(t) = -\mu_3(t) \Rightarrow \dot{\Psi}_2(t) = -\dot{\mu}_3(t) & (17''.b.V) \end{cases}$$

Sistemul ecuațiilor de dinamică devine:

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = -\,\mathrm{a} \cdot Y(t) & (4.V) \\ \dot{X}(t) = I(t) - \mathrm{a} \cdot X(t) & (5.V) \\ 0 = -\dfrac{\partial R}{\partial K}(t) + (i + \mathrm{a}) & (16.a.V) \\ \dot{\Psi}_2(t) = (i + \mathrm{a}) \cdot \Psi_2(t) - \dfrac{\partial R(\cdot)}{\partial K}(t) + (\mathrm{a} + \mathrm{r}) & (16.b.V) \end{cases}$$

Din ecuația de dinamică a împrumuturilor rezultă că $\dot{Y}(t) < 0$, deci ***volumul datoriilor descrește***. Valoarea acestora va fi:

$$Y^*(t) = \mathrm{Y}_0 \cdot e^{-\mathrm{a}t} \qquad (4'.V)$$

Din a treia relație avem:

$$\frac{\partial R}{\partial K}(t) = (i + \mathrm{a}) \qquad (16'.a.V)$$

de unde rezultă o ***traiectorie staționară a capitalului***, notată K_X^* pentru a sublinia faptul că finanțarea este proprie (autofinanțare), unde:

$$K_X^* = (R')^{-1}(\mathrm{a} + i) \qquad (16''.a.V)$$

Legitatea de evoluție pe traiectoria V impune ca ***profitul marginal net*** ($\frac{\partial R}{\partial K}(t)$ – a) să egaleze ***rata de interes*** a acționarilor.

Din ecuația de dinamică a variabilei adjuncte Ψ_2 şi ținând cont de relațiile (17".b.V) şi (16'.a.V) rezultă:

$$\dot{\mu}_3(t) = (i + \mathrm{a})\cdot\mu_3(t) + (i - \mathrm{r}) \qquad (16'.b.V)$$

cu condiția finală $\mu_3(\mathrm{T}) = 0$. Soluția acestei ecuații este:

$$\mu_3^*(t) = \frac{r - i}{a + i}[1 - e^{-(\mathrm{i}+\mathrm{a})\cdot(\mathrm{T}-\mathrm{t})}] \qquad (16''.b.V)$$

Condiția $\mu_3^*(t) > 0$ este îndeplinită numai dacă r > i. În concluzie, evoluția pe traiectoria V va avea loc atâta timp cât ***creditele sunt scumpe***.

Din (2) rezultă:

$$I^*(t) = \mathrm{a}\cdot K_X^* = \mathrm{ct.} \qquad (2.V)$$

Ecuația de dinamică a capitalului propriu va fi:

$$\dot{X}(t) = I^*(t) - \mathrm{a}\cdot X(t) = I^*(t) - \mathrm{a}\cdot K_X^* \qquad (5.V)$$

şi va avea soluția:

$$X^*(t) = e^{-\mathrm{a}t}(X_0 - K_X^*) + K_X^* \qquad (5'.V)$$

În final, putem calcula profitul net:

$$\mathrm{V}^*(t) = R(K_X^*) - \mathrm{a}\cdot K_X^* - \mathrm{r}\cdot Y^*(t) \qquad (6.V)$$

şi dividendele:

$$\mathrm{D}^*(t) = R(K_X^*) - \mathrm{a}\cdot K_X^* - (\mathrm{a} + \mathrm{r})\cdot Y^*(t) \qquad (12.V)$$

Varianta VI. $\mu_1(t) = 0$, $\mu_2(t) > 0$ şi $\mu_3(t) = 0$

Sistemul de condiții K-T devine:

$$\begin{cases} -1 + \Psi_1 - \mu_2 = 0 & (17'.a.VI) \\ 1 - \Psi_1 + \Psi_2 + \mu_2 = 0 & (17'.b.VI) \\ 0 = 0 & (18.a) \\ m\cdot(R(K) - \mathrm{a}\cdot K - \mathrm{r}\cdot Y) + \mathrm{a}\cdot X + F - I = 0 & (18.b) \\ 0 = 0 & (18.c) \end{cases}$$

din care rezultă că $\Psi_2(t) = 0$ oricare ar fi t şi implicit $\dot{\Psi}_2(t) = 0$. De aici rezultă că ecuaţia de dinamică a variabilei adjuncte $\Psi_2(t)$ devine:

$$0 = (i + a)\cdot 0 - \frac{\partial R(\cdot)}{\partial K}(t)\cdot[1 + m\cdot\mu_2(t)] + (a + r)\cdot[1 + m\cdot\mu_2(t)] \Leftrightarrow$$

$$[a + r - \frac{\partial R(\cdot)}{\partial K}(t)]\cdot[1 + m\cdot\mu_2(t)] = 0$$

şi cum m şi $\mu_2(t)$ sunt pozitive rezultă că:

$$\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K}(t) = a + r \qquad (19.VI)$$

şi R(K) = (a + r)·K + C, unde constanta C rezultă din condiţiile iniţiale.

Putem astfel considera ***legitatea:*** Evoluţia optimă se desfăşoară pe traiectoria VI atâta timp cât venitul marginal din vânzări este egal cu rata dobânzii la credite.

Conform (19.VI) care este o ecuaţie algebrică în K rezultă K(t) $= K^*_{YX}$ = ct. unde am folosit indicele $_{YX}$ pentru a arăta că sursa de finanţare este fundamentată atât pe ***credite*** (Y) cât şi pe autofinanţare (X), unde:

$$K^*_{YX} = \arg_K[\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K} = a + r] \qquad (19'.VI)$$

sau:

$$K^*_{YX} = (R')^{-1}(a + r) \qquad (19''.VI)$$

Din sistemul de condiţii K-T rezultă şi:

$$\Psi_1 = 1 + \mu_2$$

şi:

$$\dot{\Psi}_1(t) = \dot{\mu}_2$$

Înlocuind în ecuaţia de dinamică a variabilei adjuncte Ψ_1 obţinem:

$$\dot{\mu}_2 = -\frac{\partial R}{\partial K}(t) + (i + a)\cdot[1 + \mu_2(t)] - \mu_2(t)\cdot[m\cdot\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K}(t) + a\cdot(1 - m)]$$

şi cum $\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K}(t) = a + r$ vom avea:

$$\dot{\mu}_2 = -a - r + (i + a)\cdot\mu_2(t) - \mu_2(t)\cdot[m\cdot(a + r) + a\cdot(1 - m)] \Leftrightarrow$$

$$\dot{\mu}_2 = (i - m\cdot r)\cdot\mu_2 + i - r \tag{16''.a.VI}$$

care împreună cu condiția finală $\mu_2(T) = \Psi_1(T) - 1$ duce la soluția:

$$\mu_2^*(t) = \frac{r-i}{i-r\cdot m}\cdot[1 - e^{-(i - r\cdot m)(T - t)}] \tag{23.VI}$$

Studiind semnul acestei soluții în funcție de parametrii i, r şi m şi variabila t în tabelul de mai jos:

	$r - i$	$i - r\cdot m$	$\frac{r-i}{i-r\cdot m}$	$1 - e^{-(i-r\cdot m)(T-t)}$	$\mu_2^*(t)$
$i < r\cdot m$	+	–	–	–	+
$i = r\cdot m$	+	0	/	0	/
$r\cdot m < i < r$	+	+	+	+	+
$i = r$	0	+	0	+	0
$i > r$	–	+	–	+	–

rezultă că este îndeplinită condiția de admisibilitate $\mu_2^*(t) > 0$ doar dacă $i > r$ şi $m \neq \frac{i}{r}$.

Pentru $i > r$ şi $m \neq \frac{i}{r}$ vom avea din sistemul de condiții K-T:

$$\begin{cases} \mu_1 = \mu_3 = \Psi_2 = 0 \\ \mu_2 = \Psi_1 - 1 \\ I - F = m\cdot(R(K_{YX}^*) - a\cdot K_{YX}^* - r\cdot Y) + a\cdot X \end{cases}$$

care conduc la sistemul de ecuații de dinamică:

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = F(t) - a\cdot Y(t) & (4) \\ \dot{X}(t) = m\cdot(R(K_{YX}^*) - a\cdot K_{YX}^* - r\cdot Y) & (5.VI) \\ \Psi_1^* = 1 + \mu_2^*(t) = ! + \frac{r-i}{i-r\cdot m}\cdot[1 - e^{-(i - r\cdot m)(T - t)}] & (23'.VI) \\ 0 = 0 & (16.b) \end{cases}$$

În plus, avem:

$X(t) + Y(t) = K_{YX}^*$ care duce la $\dot{X}(t) + \dot{Y}(t) = 0$

şi ecuația de dinamică a capitalului (2) care devine:

$0 = I(t) - a\cdot K_{YX}^*$ de unde $I^*(t) = a\cdot K_{YX}^* = ct.$

De aici rezultă imediat:

$$F^*(t) = a\cdot K^*_{YX} - m\cdot(R(K^*_{YX}) - a\cdot K^*_{YX} - r\cdot Y) - a\cdot[K^*_{YX} - Y(t)] \quad (18'.b.VI)$$

care înlocuită în ecuaţia de dinamică (4) duce la:

$$\dot{Y}(t) = a\cdot K^*_{YX} - m\cdot(R(K^*_{YX}) - a\cdot K^*_{YX} - r\cdot Y) - a\cdot[K^*_{YX} - Y(t)] - a\cdot Y(t)$$

$\Leftrightarrow$

$$\dot{Y}(t) = -m\cdot(R(K^*_{YX}) - a\cdot K^*_{YX} - r\cdot Y) = -m\cdot V(K^*_{YX}) < 0$$

În concluzie, pe traiectoria VI are loc o ***diminuare a datoriilor*** firmei. Din ecuaţia liniară de mai sus rezultă soluţia:

$$Y^*(t) = e^{r\cdot m\cdot t}(Y_0 - Y^*) + Y^* \quad (4'.VI)$$

unde nivelul de echilibru Y^* este:

$$Y^* = \frac{1}{r}[R(K^*_{YX}) - aK^*_{YX}] \quad (4''.VI)$$

Evoluţia ***capitalului social*** $X(t)$ rezultă imediat din relaţia $X(t) + Y(t) = K^*_{YX}$ ca fiind:

$$X^*(t) = K^*_{YX} - Y^*(t)$$

şi în plus, cum $\dot{X}(t) + \dot{Y}(t) = 0$ şi $\dot{Y}(t) < 0$ rezultă că $\dot{X}(t) > 0$ deci se duce o politică de ***consolidare a firmei***.

În ceea ce priveşte ***nivelul creditelor*** $F(t)$, din condiţiile K-T rezultă:

$$0 < F^*(t) < \gamma\cdot I^*(t)$$

ceea ce înseamnă că întreprinderea ***face apel*** la credite dar ***nu la nivel maxim***.

Acest nivel este dat de (18'.b.VI) şi (4'.VI) + (4''.VI):

$$F^*(t) = a\cdot K^*_{YX} - m\cdot(R(K^*_{YX}) - a\cdot K^*_{YX} - r\cdot Y^*(t)) - a\cdot[K^*_{YX} - Y^*(t)] =$$

$$= -m\cdot(R(K^*_{YX}) - a\cdot K^*_{YX} - r\cdot Y^*(t)) + a\cdot Y^*(t)$$

$$= (a + m\cdot r)\cdot Y^*(t) - m\cdot[R(K^*_{YX}) - a\cdot K^*_{YX}]$$

Cum $Y^*(t)$ este descrescătoare rezultă că ***nivelul creditelor este în scădere***.

Deoarece

$F^*(t) = -\,m\cdot(R(K^*_{YX}) - \mathrm{a}\cdot K^*_{YX} - \mathrm{r}\cdot Y^*(t)\,) + \mathrm{a}\cdot Y^*(t) = -\,m\cdot \mathrm{V}^*(t) + \mathrm{a}\cdot Y^*(t)$

din inegalitățile $0 < F^*(t) < \gamma\cdot I^*(t)$ vom avea:

$$\mathrm{a}\cdot Y^*(t) + \gamma\cdot I^*(t) > m\cdot \mathrm{V}^*(t) + \gamma\cdot I^*(t) > \mathrm{a}\cdot Y^*(t)$$

relație care reflectă ***politica de consolidare*** a firmei pe traiectoria VI: "partea din profitul net alocată pentru dezvoltare ($m\cdot\mathrm{V}^*(t)$) plus împrumuturile pentru investiții ($\gamma\cdot I^*(t)$) depăşeşte amortismentul ($\mathrm{a}\cdot Y^*(t)$)".

Varianta VII. $\mu_1(\mathrm{t}) > 0$, $\mu_2(\mathrm{t}) = 0$ şi $\mu_3(\mathrm{t}) = 0$

Sistemul de condiții Kuhn-Tucker devine:

$$SKT: \begin{cases} -1 + \Psi_1 + \gamma\cdot\mu_1 = 0 & (17''.\mathrm{a.VII}) \\ 1 - \Psi_1 + \Psi_2 - \mu_1 = 0 & (17''.\mathrm{b.VII}) \\ \gamma\cdot I - F = 0 & (18'.\mathrm{a.VII}) \\ 0 = 0 & (18'.\mathrm{b.VII}) \\ 0 = 0 & (18'.\mathrm{c.VII}) \end{cases}$$

de unde rezultă:

$$\begin{cases} \mu_1 = \dfrac{1}{1-\gamma}\cdot\Psi_2(\mathrm{t}) & (17''.1) \\ \Psi_1(\mathrm{t}) = 1 - \dfrac{\gamma}{1-\gamma}\cdot\Psi_2(\mathrm{t}) & (17''.2) \\ \gamma\cdot I(t) = F(t) & (17''.3) \end{cases}$$

Sistemul dinamic *SD* devine:

$$SD: \begin{cases} \dot{Y}(t) = F(t) - \mathrm{a}\cdot Y(t) & (4.\mathrm{VII}) \\ \dot{X}(t) = I(t) - \mathrm{a}\cdot X(t) - F(t) & (5.\mathrm{VII}) \\ \dot{\Psi}_1(t) = -\dfrac{\partial R}{\partial K}(t) + (i + \mathrm{a})\cdot\Psi_1(t) & (16.\mathrm{a.VII}) \\ \dot{\Psi}_2(t) = (i + \mathrm{a})\cdot\Psi_2(t) - \dfrac{\partial R}{\partial K}(t) + (\mathrm{a} + \mathrm{r}) & (16.\mathrm{b.VII}) \end{cases}$$

Conform relației 17".2 vom avea:

$$\dot{\Psi}_1(t) = -\frac{\gamma}{1-\gamma}\cdot\dot{\Psi}_2(t) \qquad (17'''.2)$$

Înlocuind 17'''.2 şi 17".2 în 16.a.III obținem:

$$-\frac{\gamma}{1-\gamma}\cdot\dot{\Psi}_2(t) = -\frac{\partial R}{\partial K}(t) + (i + \mathrm{a})\cdot\left(1 - \frac{\gamma}{1-\gamma}\cdot\Psi_2(t)\right) \Leftrightarrow$$

$$\dot{\Psi}_2(t) = (i + \mathrm{a})\cdot\Psi_2(t) + \frac{1-\gamma}{\gamma}\cdot\frac{\partial R}{\partial K}(t) - (i + \mathrm{a})\cdot\frac{1-\gamma}{\gamma} \qquad (16'.\mathrm{a.VII})$$

Combinând această relație cu 16.b.III rezultă:

$$-\frac{\partial R}{\partial K}(t) + (\mathrm{a} + \mathrm{r}) = \frac{1-\gamma}{\gamma}\cdot\frac{\partial R}{\partial K}(t) - (i + \mathrm{a})\cdot\frac{1-\gamma}{\gamma} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial R}{\partial K}(t) = \gamma(\mathrm{a} + \mathrm{r}) + (i + \mathrm{a})\cdot(1 - \gamma) = \mathrm{a} + (1 - \gamma)\cdot\mathrm{i} + \gamma\cdot\mathrm{r} = \text{constant} \qquad (19.\mathrm{VII})$$

În concluzie, evoluția optimă are loc pe traiectoria VII atâta timp cât venitul marginal net ($\frac{\partial R}{\partial K}(t) - \mathrm{a}$) este ***constant*** şi ***egal*** cu suma ponderată a ratelor de interes (rata dobânzii "r" şi rata de creştere a acțiunilor "*i*"), unde ponderea γ este rata maximă a împrumuturilor pentru investiții.

De asemenea, ***capitalul este staționar***, el fiind soluția ecuației algebrice:

$$R'(K) = \gamma(\mathrm{a} + \mathrm{r}) + (i + \mathrm{a})\cdot(1 - \gamma)$$

adică:

$$K_Y^* = (R')^{-1}[\gamma(\mathrm{a} + \mathrm{r}) + (i + \mathrm{a})\cdot(1 - \gamma)] \qquad (19''.\mathrm{VII})$$

Obs. Ecuația (19') are soluție unică, conform proprietăților i) şi ii) ale funcției $R(K)$.

Vom avea deci $\dot{K}(t) = 0$ şi conform ecuației de dinamică (2) vom avea că valoarea investiției este staționară şi anume:

$$I^*(t) = \mathrm{a}\cdot K_Y^* = \text{constant} \qquad (20.1)$$

De asemenea, din relația 17".3 rezultă că şi volumul creditelor este constant şi anume:

$$F^*(t) = \gamma \cdot I^*(t) = \gamma \cdot a \cdot K_Y^* = \text{constant} \qquad (20.2)$$

Firma apelează deci la volumul maxim al creditelor ce i se pot acorda pentru investiția I^*, conform definiției coeficientului γ.

Dinamica variabilelor adjuncte

Revenind la sistemul dinamic *SD*, ecuația (16.a.VII) devine:

$$\dot{\Psi}_1(t) = (i + a)\cdot \Psi_1(t) - (a + (1-\gamma)\cdot i + \gamma \cdot r) \qquad (16'.a.VII)$$

care este o ecuație liniară în $\Psi_1(t)$ a cărei soluție este:

$$\Psi_1(t) = C\cdot e^{(i+a)t} + 1 + \gamma\cdot\frac{r-i}{i+a}$$

Constanta C va fi aflată din condiția: $\Psi_1(T) = 1$, din care rezultă:

$$1 = C\cdot e^{(i+a)T} + 1 + \gamma\cdot\frac{r-i}{i+a} \Leftrightarrow C = -\gamma\cdot\frac{r-i}{i+a}\cdot e^{-(i+a)T}$$

În final obținem soluția:

$$\Psi_1(t) = \gamma\cdot\frac{r-i}{i+a}\cdot[1 - e^{(i+a)(t-T)}] + 1 \qquad (21)$$

Din relația 17".2 rezultă

$$\Psi_2(t) = (1-\gamma)\cdot\frac{i-r}{i+a}\cdot[1 - e^{(i+a)(t-T)}] \qquad (22)$$

care verifică $\Psi_2(T) = 0$.

Din relația 17".1 şi ținând cont de condiția de semn $\mu_1 > 0$ şi $\gamma \in (0,1)$ rezultă condiția: $\Psi_2(t) > 0$ care se verifică numai dacă $i > r$.

Deci politica $K(t) = K_Y^*$ = constant poate fi aplicată numai dacă ***creditele sunt ieftine*** ($r < i$).

În final, variabilele de stare rezultă din sistemul:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = -a\cdot X(t) + a\cdot K_Y^* - a\cdot\gamma\cdot K_Y^* & (5'.VII) \\ \dot{Y}(t) = -a\cdot Y(t) + a\cdot\gamma\cdot K_Y^* & (4'.VII) \end{cases}$$

cu condițiile inițiale $X(t) = X_0$ şi $Y(t) = Y_0$.

Soluția este:

$$\begin{cases} X^*(t) = (X_0 - X^*)e^{-at} + X^* \quad \text{unde } X^* = (1-\gamma)\cdot K_Y^* & (5''.\text{VII}) \\ Y^*(t) = (Y_0 - Y^*)e^{-at} + Y^* \quad \text{unde } Y^* = \gamma\cdot K_Y^* & (4''.\text{VII}) \end{cases}$$

De aici rezultă ***evoluţia valorii capitalului*** $K(t)$ spre valoarea de echilibru K_Y^*:

$$K^*(t) = (K_0 - K^*)e^{-at} + K^* \quad \text{unde } K^* = K_Y^* \qquad (2'.1)$$

şi ***volumul dividendelor*** pe traiectoria VII:

$$D^*(t) = R(K^*(t)) - (\text{a} + \text{r})\cdot Y^*(t) - \text{a}\cdot(1-\gamma)\cdot K_Y^* \qquad (12')$$

de unde $R^*(t) = R(K^*(t))$ este venitul de-a lungul traiectoriei $K^*(t)$.

Varianta VIII. $\mu_1(t) = 0$, $\mu_2(t) = 0$ şi $\mu_3(t) = 0$

Condiţiile K-T devin:

$$SKT: \begin{cases} -1 + \Psi_1 = 0 & (17'.\text{a.VIII}) \\ 1 - \Psi_1 + \Psi_2 = 0 & (17'.\text{b.VIII}) \\ \mu_1 = 0,\ \gamma\cdot I - F > 0 & (18.\text{a.VIII}) \\ \mu_2 = 0,\ m\cdot(R(K) - \text{a}\cdot K - \text{r}\cdot Y) + \text{a}\cdot X + F - I > 0 & (18.\text{b.VIII}) \\ \mu_3 = 0,\ F > 0 & (18.\text{c.VIII}) \end{cases}$$

de unde:

$$\begin{cases} \Psi_1(t) = 1 \Rightarrow \dot{\Psi}_1(t) = 0 & (17''.\text{a.VIII}) \\ \Psi_2(t) = 0 \Rightarrow \dot{\Psi}_2(t) = 0 & (17''.\text{b.VIII}) \end{cases}$$

Ecuaţiile de dinamică devin:

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = F(t) - \text{a}\cdot Y(t) & (4.\text{VIII}) \\ \dot{X}(t) = I(t) - \text{a}\cdot X(t) - F(t) & (5.\text{VIII}) \\ 0 = -\dfrac{\partial R}{\partial K}(t) + (i + \text{a}) & (16.\text{a.VIII}) \\ 0 = -\dfrac{\partial R(\cdot)}{\partial K}(t) + (\text{a} + \text{r}) & (16.\text{b.VIII}) \end{cases}$$

Din ultimele două ecuații rezultă:

$$i + a = \frac{\partial R}{\partial K}(t) = a + r \qquad (16.VIII)$$

şi, în final:

$$i = r \qquad (16'.VIII)$$

ceea ce contrazice ipoteza $i \neq r$, deci traiectoria nu este admisibilă.
În concluzie singurele traiectorii admisibile sunt II … VII.

Sinteza traiectoriilor optim admisibile. Strategii optime

În funcție de situația internă – reflectată prin nivelul venitului marginal net ($\frac{\partial R}{\partial K_t}$ – a) şi de echilibrul macroeconomic (reflectat prin ecartul rata dobânzii – rata de randament a acțiunilor (r – i)), firma poate aplica şase politici optimale. Prin combinarea lor în mod optimal se vor obține, aşa cum vom arăta, ***două strategii optimale***, în funcție de condițiile de creditare.

Sinteza rezultatelor privind cele 6 politici optimale analizate mai sus este prezentată în tabloul sinoptic:

Indicatori / Politici optime	Variabile de decizie		Variabile de stare				D_t	Starea firmei şi condiții
	I_t^*	F_t^*	$\dot{X}_t$	$\dot{Y}_t$	$\dot{K}_t$	K_t		
II –III	Max	Max	+	+	+	$K_t^* \uparrow$	Min	***Creştere maximă*** prin credite şi autofinanțare
III – VI	0	0	–	–	–	$K_t^* \downarrow$		***contracție***
IV – V	Max	0	+	–	+	$K_t^* \uparrow$	Min	***Creştere maximă*** prin autofinanțare
V – IV	$a \cdot K_X^*$	0	+	–	0	K_X^* = const	D_t^*	***Staționară*** prin autofinanțare pură (r > i)
VI – II	$a \cdot K_{XY}^*$	Moderat	+	–	0	K_{XY}^*	Min	***Consolidare*** prin credite şi autofinanțare (r > i)
VII – I	$a \cdot K_Y^*$	$a \cdot \gamma \cdot K_Y^*$ = max	±	∓	0	K_Y^* = const.	D_t^*	***Staționară*** prin credite maxime (r < i)

unde:

$$K_Y^* = \arg_K \left[\left(\frac{\partial R}{\partial K} - a \right) = \gamma \cdot r + (r - \gamma) \cdot i \right]$$

$$K^*_{YX} = \arg_K \left[\left(\frac{\partial R}{\partial K} - a \right) = r \right]$$

$$K^*_{X} = \arg_K \left[\left(\frac{\partial R}{\partial K} - a \right) = i \right]$$

Din condițiile de creditare (credite scumpe (r > i) sau ieftine (r < i)), se identifică ***două strategii optime***:

Cazul 1*. *Credite ieftine (r < i)

Traiectoria staționară optimă va fi drumul (VII), cu $K_t = K^*_Y$ = const. În consecință, firma va adopta strategia:

a) dacă $K_0 > K^*_Y$, adică firma deține la momentul inițial un stoc al bunurilor de capital (K_0) superior nivelului optim staționar K^*_Y, se va aplica o politică de descreştere (contracție), urmând pe termen scurt (TS) drumul optimal (III) – indiferent dacă creditele sunt ieftine sau scumpe, reducând datoriile Y_t ($\dot{Y}_t < 0$), acceptându-se descreşterea capitalului social ($\dot{X}_t < 0$). În concluzie, pe termen scurt, pe perioada $t \in [0,\tau_{37}]$, firma trebuind să intre într-un proces de decapitalizare, urmând traiectoria optimă III, până atinge nivelul optim K^*_Y, adică traiectoria optimă VII, moment notat τ_{37}; acest punct este ***momentul de comutație*** de pe traiectoria III pe traiectoria VII (vezi figura 1). Algoritmul de determinare a momentului de comutație τ_{ij} de pe traiectoria i pe traiectoria j va fi detaliat în paragraful următor.
b) dacă $K_0 < K^*_Y$, atunci pe termen scurt firma trebuie să aplice o politică optimală de creştere maximă (traiectoria II cu investiție maximă posibilă prin sursele de autofinanțare proprii şi ***credite maxime***) prin creşterea capitalului ($\dot{K}^*_t > 0$) până la momentul τ_{27} când intră pe traiectoria staționară (VII) corespunzătoare nivelului K^*_Y al capitalului (vezi figura 1) şi apoi să urmeze traiectoria VII pe termen lung.

c) dacă $K_0 = K_Y^*$, atunci strategia optimă trebuie să fie traiectoria VII, pe termen lung.

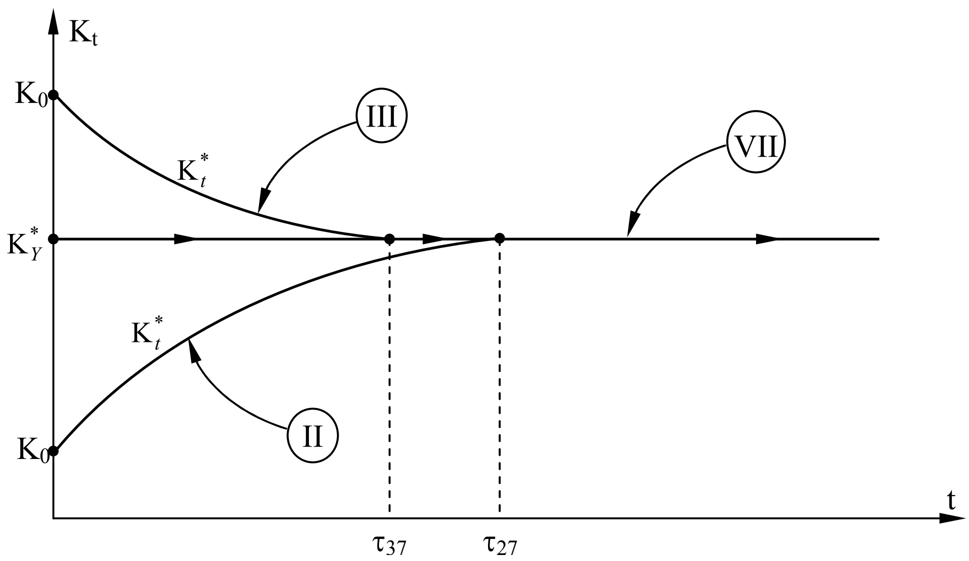

Figura 1. Strategii optime în condițiile unor credite ieftine r < i

Cazul 2. Credite scumpe (r > i)

Problema este mai complicată, deoarece, după cum se evidențiază în tabloul sintetic de analiză, există două traiectorii optime staționare (traiectoria V şi traiectoria VI).

Teoremă. Atâta timp cât r > i politica optimală de autofinanțare pură K_X^* (traiectoria V) este superioară politicii mixte (K_{YX}^*) de finanțare prin credite şi autofinanțare (traiectoria VI)

Demonstrație. Pe traiectoria V, a politicii de autofinanțare pură, avem $\frac{\partial R}{\partial K}(K_X^*) = a + i$ iar pe traiectoria mixtă VI avem $\frac{\partial R}{\partial K}(K_{YX}^*) = a + r$. Cum r > i rezultă că a + r > a + i şi deci $\frac{\partial R}{\partial K}(K_{YX}^*) > \frac{\partial R}{\partial K}(K_X^*)$. Conform ipotezei veniturilor marginale descrescătoare ($\frac{\partial^2 R}{\partial^2 K} < 0$), din $\frac{\partial R}{\partial K}(K^*_{YX}) > \frac{\partial R}{\partial K}(K^*_X)$ rezultă $K^*_{YX} < K^*_X$.

Analiza posibilităţilor de evoluţie pune în evidenţă combinarea politicilor II, III şi IV cu cele două traiectorii V şi VI, ca în figura 2, în funcţie de starea iniţială K_0.

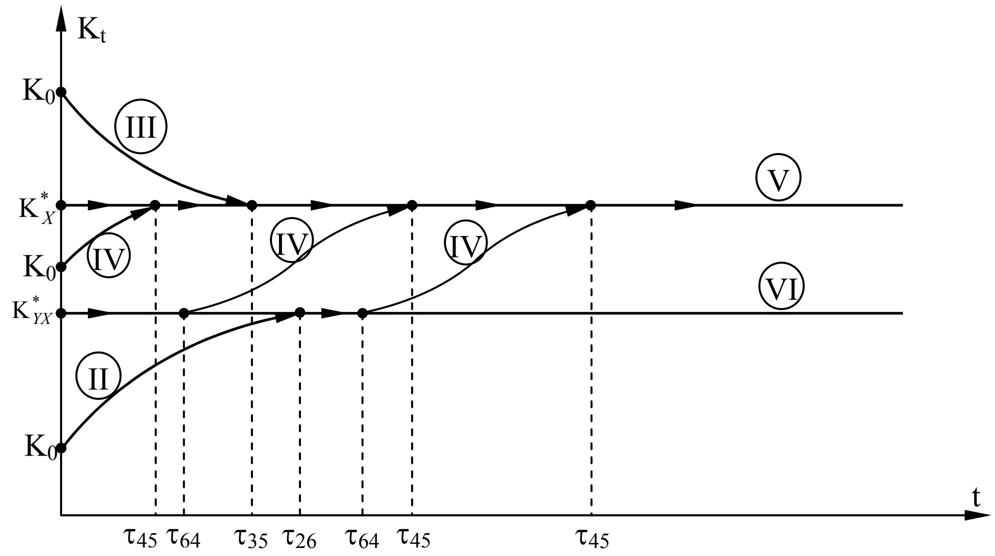

Figura 2. Strategii optime în condiţiile unor credite scumpe r > i

Se constată că:

- dacă nivelul iniţial $K_0 < K^*_{YX}$, firma va aplica pe termen scurt politica II de creştere prin autofinanţare şi credite maxime (chiar dacă în această conjunctură creditele sunt scumpe), până în momentul τ_{26} de atingere a nivelului K^*_{YX}, când intră pe politica VI, staţionară.
- dacă $K_0 \in (K^*_{YX}, K^*_X)$ firma va aplica pe termen scurt politica IV de creştere maximă prin autofinanţare (fără credite), până în momentul τ_{45} când trece pe politica staţionară V, tot cu autofinanţare pură, dar cu investiţii de menţinere ($I^* = a \cdot K^*_X$).

– Dacă $K_0 > K_X^*$, firma va aplica pe termen scurt politica III de contracție (decapitalizare, cu investiție nulă), până la momentul τ_{35}, când trece pe politica staționară V.

Vom demonstra în paragraful următor că, deşi politica VI este staționară, firma poate trece la anumite momente τ_{64} pe traiectoria de creştere prin autofinanțare IV, cu investiție maximă, evidențiindu-se, în funcție de starea inițială K_0 strategiile:

$$\begin{cases} VI \to IV \to V \\ II \to VI \to IV \to V \end{cases}$$

Analiza concatenarității traiectoriilor optime
Determinarea momentelor de comutație τ_{ij}

A. ***Cazul creditelor ieftine*** (r < i)

Pentru a găsi criteriile de concatenare a diverselor politici optimale într-o strategie pe termen lung, vom folosi condițiile de optim date de principiul lui Pontreaghin, care vor da informațiile privind momentele de comutație de pe o traiectorie pe alta.

Din figura 1, pentru r < i, rezultă că trebuie să cercetăm accesibilitatea spre traiectoria VII a drumurilor II şi III.

Notăm cu τ_{ij}^- momentul intrării de pe traiectoria i pe traiectoria j şi cu τ_{ij}^+ momentul plasării pe traiectoria j, unde $\tau_{ij}^- = \tau_{ij}^+ = \tau_{ij}$.

Astfel, pe traiectoria VII avem $\mu_7(t) > 0$ oricare ar fi $t \in [0,T]$, deci $\mu_7(\tau_{i7}^+) > 0$, i = 2;3.

Din (*SKT*) (17".a.VII) şi (17".b.VII), pe traiectoria VII, avem:

$$\Psi_1(\tau_{i7}^+) = 1 - \gamma\cdot\mu_1(\tau_{i7}^+)$$

$$\Psi_2(\tau_{i7}^+) = (1-\gamma)\cdot\mu_1(\tau_{i7}^+) > 0 \qquad (17'''.1)$$

a) ***Accesibilitatea de pe traiectoria II la traiectoria VII*** (strategia II → VII)

Din condițiile K-T (17'.b.II) rezultă $\Psi_2(t) > 0$, deoarece $\mu_2(t) > 0$ pe traiectoria II, deci $\Psi_2(\tau_{27}^-) > 0$. Cum $\Psi_2(\tau_{27}^-) > 0$ rezultă că traiectoria II accede la traiectoria VII şi momentul de comutaţie de pe II pe VII este soluţia ecuaţiei $\Psi_2(\tau_{27}^-) = \Psi_2(\tau_{27}^+)$, adică $\Psi_2(\tau_{27})\big|_{II} = \Psi_2(\tau_{27})\big|_{VII}$, unde $\cdot\big|_{II}$ şi $\cdot\big|_{VII}$ arată pe ce traiectorie se calculează variabilele adjuncte $\Psi_2(t)$. Însă, aşa cum rezultă din analiza traiectoriilor, expresia analitică $\Psi_2(t)$ nu poate fi determinată analitic în anumite variante, în aceste cazuri folosirea ecuaţiei $\Psi_2(\tau_{27})\big|_{II} = \Psi_2(\tau_{27})\big|_{VII}$ fiind utilă numai dacă se operează cu traiectoria $\Psi_2(\tau_{27})\big|_{II}$ determinată prin metode de aproximare.

Vom folosi din acest motiv o altă cale de determinare a momentului de comutaţie, bazat pe observaţia că, dacă traiectoria i accede la traiectoria j, momentul de comutaţie τ_{ij} este soluţia ecuaţiei:

$$K^*(t)\big|_{(i)} = K^*(t)\big|_{(j)} \tag{23}$$

deci în cazul nostru $K^*(t)\big|_{II} = K_Y^*$ unde $K^*(t)\big|_{II}$ se calculează cu formula $K^*(t) = X_t^* + Y_t^*$ rezultată din sistemul (5.II) şi (4.II) şi $K_Y^* = K^*(t)\big|_{VII}$ este traiectoria staţionară dată de (19".VII), soluţie a ecuaţiei:

$$\frac{\partial R}{\partial K_t} - a = r\cdot\gamma + (1-\gamma)\cdot i \tag{19.VII}$$

Accesibilitatea (II $\to$ VII) este posibilă dacă $K(t)\big|_{II} < K_Y^*$. Cum $(\frac{\partial R}{\partial K_t}\downarrow)$ rezultă cerinţa:

$$\left(\frac{\partial R}{\partial K_t} - a\right)_{II} > \gamma\cdot r + (1-\gamma)\cdot i \tag{24'}$$

Pentru evaluarea venitului marginal net pe traiectoria II, din (5.II) şi (4.II) rezultă:

$$\dot{K}(t) = \dot{X}(t) + \dot{Y}(t) = m\cdot(R(K(t)) - a\cdot K(t) - r\cdot Y(t)) + \frac{\gamma}{1-\gamma}\{m\cdot[R(K(t))$$
$$- a\cdot K(t) - r\cdot Y(t)] + a\cdot X(t)\} - a\cdot Y(t) =$$

$$= \frac{m}{1-\gamma}\cdot[R(K(t)) - a\cdot K(t) - r\cdot Y(t)] + \frac{\gamma}{1-\gamma}\cdot a\cdot X(t) - a\cdot Y(t) \tag{25}$$

Cum $R(K(t)$ este concavă monoton crescătoare rezultă că venitul marginal este sub nivelul venitului mediu (vezi figura 3):

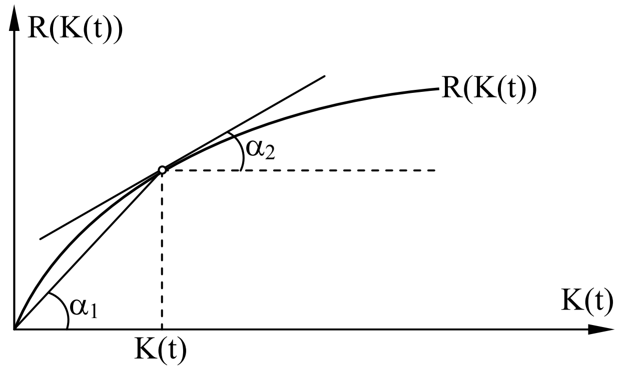

Figura 3

$$\frac{\partial R}{\partial K_t} < \frac{R}{K_t} \qquad (26)$$

(adică $tg(\alpha_1) < tg(\alpha_2) \Leftrightarrow \alpha_1 < \alpha_2$).

Consecință: Între venitul net marginal şi venitul net mediu există inegalitatea:

$$\frac{\partial R}{\partial K_t} - a < \frac{R}{K_t} - a \qquad (26')$$

adică:

$$K_t \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial K_t} - a\right) < R - a \cdot K_t \qquad (26'')$$

Obținem:

$$R(K_t) - a \cdot K_t > K_t \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial K_t} - a\right) \overset{(24')}{>} K_t \cdot (\gamma \cdot r + (1-\gamma) \cdot i) > K_t \cdot r \qquad (26''')$$

ultima inegalitate rezultând din condiția $i > r$ (credite ieftine). Înlocuind în (25) deducem:

$$\dot{K}(t) > \frac{1}{1-\gamma} \cdot [m \cdot r(K_t - Y(t)) + \gamma \cdot a \cdot X(t) - (1-\gamma) a \cdot Y(t)] \qquad (25')$$

Dar $\dot{K}(t) > 0$ pe traiectoria II. Deducem rezultatul important: "O condiție suficientă pentru îndeplinirea cerinței (24) este ca raportul dintre datoria firmei şi capitalul propriu să nu depăşească pragul de viabilitate a firmei ($h = \frac{m \cdot r + a \cdot \gamma}{(1-\gamma) \cdot a}$):

$$\frac{Y_t}{X_t} < \frac{m \cdot r + a \cdot \gamma}{(1-\gamma) \cdot a} \tag{27}$$

În concluzie, când $K_0 < K_Y^*$, în condiţiile creditelor ieftine (r < i), traiectoria II accede (crescător) către traiectoria VII, atingând-o la momentul τ_{27}, soluţie a ecuaţiei (23). Acelaşi comportament se găseşte pentru orice stare iniţială la un moment t_0, cu condiţia ca la acest moment firma să se încadreze în pragul de viabilitate (27).

b) ***Accesibilitatea traiectoriei VII de pe traiectoria III***

Este posibilă când $K_0 > K_Y^*$, deoarece $\left(K_t^*\right)\big|_{III} \downarrow$. Aceasta arată că:

$$\left(\frac{\partial R}{\partial K_t} - a\right)\Big|_{III} < \gamma \cdot r + (1-\gamma) \cdot i \tag{28}$$

deci venitul marginal net este redus; în aceste condiţii firma trebuie să aplice un program de contracţie (decapitalizare) până se atinge egalitatea:

$$\left(\frac{\partial R}{\partial K_t} - a\right)\Big|_{III} = \gamma \cdot r + (1-\gamma) \cdot i \tag{29}$$

ecuaţie care dă soluţia $t = \tau_{37}$, adică momentul de trecere la politica VII.

Observaţie: Analiza concatenărilor posibile prin evidenţierea condiţiilor de realizabilitate a politicilor după cum creditele sunt ieftine (r < i) sau scumpe (r > i), care a dus la obţinerea doar a două variante posibile:

$$\begin{cases} II \rightarrow VII \\ III \rightarrow VII \end{cases}$$

poate fi suplinită prin analiza de concatenare a diverselor traiectorii, demonstrându-se imposibilitatea trecerii pe traiectoria VII de pe orice traiectorie IV, V sau VI. Astfel:

- trecerea de pe traiectoria VI pe VII arată că $\Psi_2(\tau_{67}^-) = 0$, conform (16'.b.VI) în contradicţie cu $\Psi_2(\tau_{67}^+) > 0$, conform (17'''.VII).
- trecerea de pe traiectoria V pe VII arată că $\Psi_2(\tau_{57}^-) < 0$, conform (16'.b.V) în contradicţie cu $\Psi_2(\tau_{57}^+) > 0$, conform (17'''.VII).

– trecerea de pe traiectoria IV pe VII arată că $\Psi_2(\tau_{47}^{-}) < 0$, conform (16'.b.IV) în contradicție cu $\Psi_2(\tau_{47}^{+}) > 0$, conform (17'''.VII).

B. ***Cazul creditelor scumpe*** (r > i)

Strategiile optime posibile sunt prezentate în figura 2. Cum politicile optimale VII, VI şi V sunt staționare, iese din discuție posibilitatea concatenării între acestea (deoarece $K_X^* \neq K_Y^* \neq K_{XY}^*$).

a) ***Accesibilitatea către traiectoria V***, adică spre politica staționară cu autofinanțare pură, K_X^*.

a_1) accesibilitatea de pe ***traiectoria II pe traiectoria V*** este imposibilă deoarece pe traiectoria II avem $\Psi_2(t) > 0$ oricare ar fi $t > 0$, deci $\Psi_2(\tau_{25}^{-}) > 0$ în contradicție cu faptul că pe traiectoria V avem $\Psi_2(t) = -\mu_3(t) < 0$ oricare ar fi $t > 0$, conform (17'.V).

a_2) accesibilitatea ***de pe traiectoria IV pe traiectoria V*** este posibilă dacă şi numai dacă:

$$K_t^* \big|_{IV} < K_X^* \qquad (24.A.2)$$

deoarece pe traiectoria IV avem $\Psi_2(t) = -\mu_3(t) < 0$ deci există $t = \tau_{45}$ astfel încât $\Psi_2(\tau_{45}^{-}) = \Psi_2(\tau_{45}^{+})$. Evident $t = \tau_{45}$ este soluția ecuației $K_t^* \big|_{IV} = K_X^*$.

a_3) accesibilitatea ***de pe traiectoria III pe traiectoria V*** este posibilă când $K_0 > K_X^*$, deoarece $\left(K_t^*\right)\big|_{III} \downarrow$.