Modelul Jorgenson

Este un model în care este urmărită strategia firmei în ceea ce priveşte efectuarea investiţiilor şi efectele deprecierii capitalului asupra evoluţiei întreprinderii analizate.

Investiţiile sunt privite ca sacrificii ale puterii de cumpărare actuale pentru obţinerea de venituri viitoare.

1 Ipotezele modelului sunt:

1. Maximizarea veniturilor actualizate, pe un orizont de timp infinit;
2. Pentru a face comparabile fluxurile de venit din diferite intervale de timp se introduce o rată de actualizare i, care reprezintă rata de revenire scontată a acţionarilor;
3. Firma produce un singur tip de produs pe care-l vinde pe o piaţă perfect competitivă cu un preţ fixat p.
4. Firma foloseşte două tipuri de factori de producţie: munca şi capitalul, pe care le achiziţionează de pe pieţe competitive, astfel încât salariul mediu şi preţul mediu al capitalului sunt fixate (w, c).

2 Ecuaţiile modelului sunt:

1. *Ecuaţia venitului*

$$R(t) = p \cdot Q(K(t), L(t)) - w \cdot L(t) - c \cdot I(t) \tag{1}$$

unde:
$R(t)$ = venitul net (profitul) la momentul t;
$Q(t)$ = producţia fizică la momentul t;
$I(t)$ = investiţia brută la momentul t;
$K(t)$ = stocul de capital fix şi circulant la momentul t;
$L(t)$ = volumul forţei de muncă la momentul t;
c = preţul unitar al bunurilor capital;
w = preţul unitar al muncii (salariul mediu);

2. *Ecuaţia de dinamică a capitalului*

$$\dot{K}(t) = I(t) - a \cdot K(t) \tag{2}$$

unde:

$\dot{K}(t)$ = investiția netă;

a = rata de depreciere a capitalului (*Obs*: aceasta reprezintă o depreciere exponențială a capitalului)

Obs: Ecuația de mai sus este o ecuație liniară în $K(t)$. Rezolvarea acesteia se reduce la rezolvarea ecuației omogene:

$$\dot{K}(t) = -a \cdot K(t) \tag{3}$$

care are soluția generală:

$$K_G(t) = A \cdot e^{-at} \tag{4}$$

iar, dacă $K_P(t)$ este o soluție particulară a ecuației liniare, soluția generală a ecuației liniare va fi:

$$K(t) = A \cdot e^{-at} + K_P(t) \tag{5}$$

3 Funcția de producție are proprietățile:

Crescătoare: $\frac{\partial Q}{\partial K}(t) > 0,\quad \frac{\partial Q}{\partial L}(t) > 0$ (6)

Strict concavă: $\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2}(t) < 0,\quad \frac{\partial^2 Q}{\partial L^2}(t) < 0,\quad \frac{\partial^2 Q}{\partial K^2}(t) \cdot \frac{\partial^2 Q}{\partial L^2}(t) > \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial K \partial L}(t)\right)^2$ (7)

– *Venituri descrescătoare la scală*

Pentru ca activitatea de producție să demareze este necesar ca venitul marginal al fiecărui factor să depășească costul său marginal:

$$\begin{cases} p \cdot \frac{\partial Q}{\partial K}(t) > c(i + a) \\ p \cdot \frac{\partial Q}{\partial L}(t) > w \end{cases} \tag{8}$$

unde:

$c(i + a)$ = costul marginal al capitalului: pentru fiecare unitate monetară cheltuită pe bunuri capital trebuie asigurată revenirea (venitul) acționarilor şi trebuie plătită amortizarea;

w = costul unitar al muncii

4 Modelul matematic este:

$$\max_{I,L} \int_0^{\infty} e^{-it}\left[p \cdot Q\left(K(t), L(t)\right) - w \cdot L(t) - c \cdot I(t)\right]dt \qquad (9)$$

$$\begin{cases} \dot{K}(t) = I(t) - a \cdot K(t) & (10) \\ \text{- restricţie asupra variabilei de comandă} & \\ I_{min} \le I(t) \le I_{max} \quad \begin{cases} I_{\min} < 0 \\ I_{\max} > 0 \end{cases} & (11) \\ \text{restricţia de nenegativitate asupra variabilei de stare:} & \\ K(t) \ge 0 & (12) \end{cases}$$

$$K(0) = K_0 \ge 0 \qquad (13)$$

şi reprezintă o problemă de control optimal.

5 Rezolvarea matematică a modelului se face utilizând principiul lui Pontreaghin.

Deoarece funcţia obiectiv (9) este cu actualizare (apare e^{-it}) construim ***hamiltonianul*** ajustat (fără actualizare):

$$H(K(t),L(t),I(t),\lambda(t),t) = \{p \cdot Q(K(t), L(t)) - w \cdot L(t) - c \cdot I(t)\} + \lambda(t) \cdot (I(t) - a \cdot K(t)) \qquad (14)$$

unde variabila adjunctă va fi exprimată în acest caz prin transformata:

$$\Psi(t) = e^{it} \cdot \lambda(t) \qquad (15)$$

$\lambda(t)$ fiind variabila adjunctă corespunzătoare hamiltonianului $H(\cdot)$ care conţine termenul de actualizare e^{-it}, variabilă despre care se ştie că verifică ecuaţia de dinamică:

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H(\cdot)}{\partial K}(t) \qquad (16)$$

de unde rezultă:

$$\dot{\Psi}(t) = i \cdot \Psi(t) - e^{it} \cdot \frac{\partial H(\cdot)}{\partial K}(t) \qquad (17)$$

sau, mai general, teorema:

Teoremă: Dacă $X(t)$ este vectorul variabilelor de stare şi $H(\cdot)$ este hamiltonianul asociat unei probleme de control optimal fără restricţii atunci variabilele adjuncte $\Psi(t)$ folosite în construcţia hamiltonianului, prin excluderea factorului de actualizare (e^{-it}) din funcția-obiectiv, verifică ecuația de dinamică:

$$\dot{\Psi}(t) = i \cdot \Psi(t) - e^{it} \cdot \frac{\partial H(\cdot)}{\partial X} = i \cdot \Psi(t) - \frac{\partial H_{ajustat}(\cdot)}{\partial X} \quad \text{unde } \mathrm{H(t)} = e^{-it} \cdot \mathrm{H_{ajustat}(t)}$$

(18)

Dacă există şi restricții asupra variabilelor, ca în cazul de față restricțiile:

$$\begin{cases} I_{min} \le I(t) \le I_{max} \\ K(t) \ge 0 \end{cases}$$

atunci definim ***Lagrangeanul*** asociat problemei:

$$\mathcal{L}(L(t), K(t), \lambda(t), \mu_1(t), \mu_2(t), \nu(t)) =$$
$$= H(L(t), K(t), \lambda(t)) + \mu_1(t) \cdot (I(t) - I_{min}) + \mu_2(t) \cdot (I_{max} - I(t)) + \nu(t) \cdot K(t) =$$
$$= \{p \cdot Q(K(t), L(t)) - w \cdot L(t) - c \cdot I(t)\} + \lambda(t) \cdot (I(t) - a \cdot K(t)) + \mu_1(t) \cdot (I(t) - I_{min}) +$$
$$\mu_2(t) \cdot (I_{max} - I(t)) + \nu(t) \cdot K(t)$$

(19)

unde $\nu(t)$ este multiplicatorul asociat restricției asupra variabilei de stare $K(t)$ iar $\mu_1(t)$ şi $\mu_3(t)$ multiplicatorii asociați restricțiilor asupra variabilei de decizie $I(t)$.

Ecuația de dinamică (16) a variabilei adjuncte $\lambda(t)$ trebuie înlocuită cu ecuația:

$$\dot{\Psi}(t) = i \cdot \Psi(t) - e^{it} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial K}(t) \tag{20}$$

Sistemul de condiții Kuhn-Tucker se reduce la condițiile:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial I}(t) = -c + \Psi(t) + \mu_1(t) - \mu_2(t) = 0 & (21) \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial L}(t) = p \cdot \dfrac{\partial Q(\cdot)}{\partial L}(t) - w = 0 & (22) \end{cases}$$

şi:

$$\begin{cases} \mu_1(t) \cdot (I(t) - I_{min}) = 0 & (23) \\ \mu_2(t) \cdot (I_{max} - I(t)) = 0 & (24) \\ \nu(t) \cdot K(t) = 0 & (25) \\ \mu_1(t), \mu_2(t), \nu(t) \ge 0 & (26) \end{cases}$$

care este un sistem de 5 ecuaţii cu 5 necunoscute: I, L, μ_1, μ_2 şi ν, din care vom scoate variabilele de decizie I şi L în funcţie de variabila de stare K şi de variabila adjuncte Ψ.

În final, variabila de stare $K(t)$ va fi găsită din sistemul de ecuaţii diferenţiale format din ecuaţia de dinamică a variabilei de stare (10) la care se adaugă ecuaţia de dinamică a variabilei adjuncte, rezultând un sistem *SD* de 2 ecuaţii diferenţiale cu 2 necunoscute $(K(t), \Psi(t))$:

$$SD: \begin{cases} \dot{K}(t) = I(t) - a \cdot K(t) & (10) \\ \dot{\Psi}(t) = i \cdot \Psi(t) - e^{it} \cdot \dfrac{\partial L(\cdot)}{\partial K}(t) = (i + a) \cdot \Psi(t) - p \cdot \dfrac{\partial Q(\cdot)}{\partial K}(t) - \nu(t) & (27) \end{cases}$$

cu valoarea iniţială $K(0) = X_0$ şi condiţia de transversabilitate :

$$\lim_{t \to \infty} \Psi(t) = \text{finit} \qquad (28)$$

Revenind la sistemul de condiţii Kuhn-Tucker, deoarece nu putem accepta situaţia în care capitalul este nul pe întregul orizont de timp analizat, pentru ecuaţia (25) analizăm doar soluţia:

$$\nu(t) = 0 \qquad (29)$$

Din (22) rezultă:

$$p \cdot \frac{\partial Q(t)}{\partial L}(t) = w \qquad (30)$$

adică venitul marginal al muncii = costul marginal, de unde:

$$\frac{\partial Q(\cdot)}{\partial L}(t) = \frac{w}{p} \qquad (31)$$

care spune că productivitatea marginală a muncii este constantă pe traiectoria de optim, de unde rezultă că funcţia de producţie Q este liniară în L. Cum $Q(K,L)$ este strict concavă rezultă că este strict concavă în K şi, în concluzie, derivata $\dfrac{\partial Q(t)}{\partial K}(t)$ este strict descrescătoare şi implicit, injectivă. Rezultă că fiecărei valori a productivităţii marginale a capitalului (= panta funcţiei $Q(K)$) îi corespunde o singură valoare a capitalului K de unde rezultă că punctul de optim (L^*, K^*) este unic.

Fiecare din ecuaţiile (23) şi (24) implică 2 cazuri ($\mu_i = 0$ sau $\mu_i \neq 0$, $i = 1,2$) rezolvarea sistemului presupunând analiza a $2^2 = 4$ variante, care pot fi sintetizate conform tabelului de mai jos:

Traiectoria	μ_1	μ_2	$I(t)$
I	+	+	$I_{min} = I(t) = I_{max}$
II	+	0	$I(t) = I_{min}$
III	0	+	$I(t) = I_{max}$
IV	0	0	$I_{min} \leq I(t) \leq I_{max}$

6 Analiza traiectoriilor

<u>Traiectoria I</u>: *(*$\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$*)*

Rezultă că $I(t) = I_{min} = I_{max}$ ceea ce este absurd deoarece s-a presupus că $I_{min} < 0 < I_{max}$ sau echivalent spus *traiectoria I nu este admisibilă*.

<u>Traiectoria II</u>: *(*$\mu_1 = 0$, $\mu_2 > 0$*)*

Implică $I(t) = I_{min}$ iar ecuația de dinamică a capitalului va avea soluția:

$$K(t) = A \cdot e^{-at} + \frac{I_{\min}}{a} \tag{32}$$

unde A se obține din condiția inițială $K(0) = K_0$, rezultând:

$$K_0 = A + \frac{I_{\min}}{a} \Rightarrow A = K_0 - \frac{I_{\min}}{a} \tag{32'}$$

şi în final traiectoria:

$$K(t) = (K_0 - \frac{I_{\min}}{a}) \cdot e^{-at} + \frac{I_{\min}}{a} \tag{32''}$$

Deoarece $I_{min} < 0$ rezultă că pentru valori suficient de mari ale lui t ar rezulta $K(t) < 0$ în contradicție cu condiția $K(t) > 0$ şi, în concluzie, această traiectorie nu poate fi cea finală.

<u>Traiectoria III</u>: *(*$\mu_2 = 0$, $\mu_1 > 0$*)*

Implică $I(t) = I_{max}$ şi ecuația de dinamică va fi:

$$K(t) = A \cdot e^{-at} + \frac{I_{\max}}{a} \tag{33}$$

unde A se obține din condiția inițială $K(0) = K_0$, rezultând:

$$K_0 = A + \frac{I_{\max}}{a} \Rightarrow A = K_0 - \frac{I_{\max}}{a} \tag{33'}$$

şi în final traiectoria:

$$K(t) = (K_0 - \frac{I_{\max}}{a}) \cdot e^{-at} + \frac{I_{\max}}{a} \tag{33''}$$

Pentru valori suficient de mari ale lui t, avem:

$$K(t) \cong \frac{I_{\max}}{a} \tag{34}$$

şi ținând cont că $\nu(t) = 0$, rezultă ecuația de dinamică a variabilei adjuncte:

$$\dot{\Psi}(t) = (i + a)\cdot \Psi(t) - p\cdot \frac{\partial Q(\cdot)}{\partial K}(t) \tag{35}$$

care are soluția:

$$\Psi(t) = B \cdot e^{(i+a)\cdot t} + \Psi_p(t) \;\Rightarrow\; \Psi(t) = B \cdot e^{(i+a)\cdot t} + f\left(\frac{\partial Q}{\partial K}\right) \tag{36}$$

Cum $Q(\cdot)$ concavă şi crescătoare $\Rightarrow$ $\frac{\partial Q}{\partial K}(t)$ pozitivă şi descrescătoare, ceea ce implică faptul că $\frac{\partial Q}{\partial K}(t)$ admite asimptotă orizontală la $+\infty$:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\partial Q}{\partial K}(t) = \alpha \geq 0 \tag{37}$$

care spune că soluția particulară $\Psi_P(t)$ poate fi aproximată la $+\infty$ cu soluția particulară a ecuației:

$$\dot{\Psi}(t) = (i + a)\cdot \Psi(t) - p\cdot\alpha \tag{38}$$

adică:

$$\Psi_P(t) \approx \frac{p \cdot \alpha}{i + a} = \text{constant} \tag{39}$$

În concluzie:

$$\lim_{t\to\infty} \Psi(t) = \infty \tag{40}$$

şi nu respectă condiția de transversalitate, adică nu poate fi soluția finală.

<u>*Traiectoria IV*</u>: *($\mu_1 = \mu_2 = 0$)*

Condițiile Kuhn-Tucker devin:

$$\Psi(t) = c \Rightarrow \dot{\Psi}(t) = 0 \tag{41}$$

şi:

$$\frac{\partial Q(\cdot)}{\partial L}(t)=\frac{w}{p} \tag{42}$$

Din ecuația implicită (42) se scoate variabila de decizie $L(t)$ în funcție de variabila de stare $K(t)$:

$$L = f(K) \tag{43}$$

Introducând relațiile (41) şi (43) în ecuația de dinamică a variabilei adjuncte (27) rezultă:

$$(i + a)\cdot c - p\cdot \frac{\partial Q(f(K),K)}{\partial K}(t) = 0 \tag{44}$$

şi obținem:

$$\frac{\partial Q(f(K),K)}{\partial K}(t) = \frac{(i+a)\cdot c}{p} \tag{45}$$

Ecuația (45) este o ecuație algebrică cu necunoscuta K(t).

Rezolvând această ecuație rezultă:

$$K(t) = K^{*} = constant \tag{46}$$

de unde:

$$\dot{K}(t) = 0 \tag{47}$$

Înlocuind rezultatul (46) în relația (43) obținem volumul forței de muncă:

$$L(t) = f(K^{*}) = L^{*} = constant \;\Rightarrow\; \dot{L}(t) = 0 \tag{48}$$

Din ecuația de dinamică rezultă valoarea investițiilor:

$$I(t) = a\cdot K^{*} = I^{*} = constant \tag{49}$$

Deoarece:

$$\lim_{t\to\infty}\Psi(t) = c = \text{constant} \tag{50}$$

rezultă că traiectoria IV satisface condiția de transversalitate.

În ceea ce priveşte analiza soluției finale, avem două variante:

a) Dacă $K^{*} = K_0$, soluția găsită satisface şi condiția inițială şi este soluția finală.

b) Dacă $K^{*} \neq K_0$ soluția găsită nu satisface şi condiția inițială şi nu este soluția finală.

În acest caz, deoarece nici una din soluţiile găsite nu poate fi singură soluţia finală, căutăm soluţii compuse. Deoarece singura soluţie care satisface condiţia de transversalitate este traiectoria IV, ea va fi soluţia finală pe un interval de tipul [T,∞). Ea trebuie însă, pentru a se îndeplini şi condiţia iniţială, să fie precedată de cel puţin una din traiectoriile II şi III. În funcţie de relaţia dintre valoarea iniţială a capitalului K_0 şi valoarea K^* corespunzătoare traiectoriei IV, avem două variante:

Varianta 1: $K^* < K_0$

În acest caz, pentru a ajunge de la valoarea K_0 a capitalului la valoare mai mică K^* firma trebuie să aplice o politică de consum maxim ($I = I_{min}$) care duce la o traiectorie descendentă a capitalului (traiectoria II) până când valoarea capitalului devine $K(t) = K^*$, moment în care firma cuplează pe traiectoria constantă IV.

Momentul de cuplare t^* se obţine din relaţia de cuplare $K(t) = K^*$:

$$K(t) = (K_0 - \frac{I_{\min}}{a}) \cdot e^{-at} + \frac{I_{\min}}{a} = K^* \qquad (51)$$

care duce la soluţia:

$$t^* = -\frac{1}{a} \cdot \ln \frac{K^* - \frac{I_{\min}}{a}}{K_0 - \frac{I_{\min}}{a}} \qquad (52)$$

Pentru ca această comutare să fie acceptabilă este necesar să fie respectate condiţiile de continuitate şi derivabilitate impuse funcţiilor implicate în model.

În acest caz:

$\mu_1 > 0$ pe traiectoria II şi $\mu_1 = 0$ pe traiectoria IV

$\mu_2 = 0$ şi $\nu = 0$ pe ambele traiectorii

Pentru claritatea expunerii vom nota cu $\mu_{1(II)}$ şi $\mu_{1(IV)}$ cei doi multiplicatori corespunzători celor două traiectorii.

În momentul cuplării trebuie ca $\mu_{1(II)}(t^*) = 0$ şi de asemenea $\mu'_{1(II)}(t^*)$ = 0.

Pe traiectoria II avem:

$$\mu_{1(II)} = c - \Psi(t) \qquad (53)$$

şi prin înlocuirea în ecuaţia de dinamică a variabilei de ajustare avem:

$$\mu'_{1(II)}(t) = \left(p \cdot \frac{\partial Q}{\partial K}(t) - (a+i) \cdot c \right) + (a+i) \cdot \mu_{1(II)}(t) \qquad (54)$$

relație care, pentru $t = t^*$ implică:

$$p \cdot \frac{\partial Q}{\partial K}(t^*) = (i+a) \cdot c \qquad (55)$$

Evoluția mărimilor K, L şi I este ilustrată grafic mai jos:

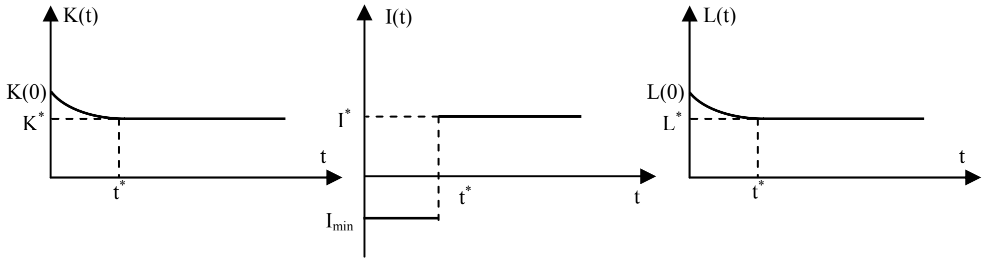

Figura 3.1

Varianta 2: $K^* > K_0$

În acest caz, pentru a ajunge de la valoarea K_0 a capitalului la valoare mai mare K^*, firma trebuie să aplice o politică de investiții maxime ($I = I_{max}$) care duce la o traiectorie ascendentă a capitalului (traiectoria III) până când valoarea capitalului devine $K(t) = K^*$, moment în care firma cuplează pe traiectoria constantă IV.

Momentul de cuplare t^* se obține din relația de cuplare $K(t) = K^*$:

$$K(t) = (K_0 - \frac{I_{\max}}{a}) \cdot e^{-at} + \frac{I_{\max}}{a} = K^* \qquad (56)$$

care duce la soluția:

$$t^* = -\frac{1}{a} \cdot \ln \frac{K^* - \frac{I_{\max}}{a}}{K_0 - \frac{I_{\max}}{a}} \qquad (57)$$

Pentru ca această comutare să fie acceptabilă este necesar să fie respectate condițiile de continuitate şi derivabilitate impuse funcțiilor implicate în model.

În acest caz:

$\mu_2 > 0$ pe traiectoria III şi $\mu_2 = 0$ pe traiectoria IV

$\mu_1 = 0$ şi $\nu = 0$ pe ambele traiectorii

În momentul cuplării trebuie ca $\mu_{2(III)}(t^*) = 0$ şi de asemenea $\mu'_{2(III)}(t^*) = 0$.

Pe traiectoria III avem:

$$\mu_{2(III)} = c - \Psi(t) \tag{58}$$

şi prin înlocuirea în ecuația de dinamică a variabilei de ajustare avem:

$$\mu'_{2(III)}(t) = \left(p \cdot \frac{\partial Q}{\partial K}(t) - (a+i) \cdot c \right) + (a+i) \cdot \mu_{2(III)}(t) \tag{59}$$

relație care, pentru $t = t^*$ implică:

$$p \cdot \frac{\partial Q}{\partial K}(t^*) = (i+a) \cdot c \tag{60}$$

Evoluția mărimilor K, L şi I este ilustrată în graficul următor:

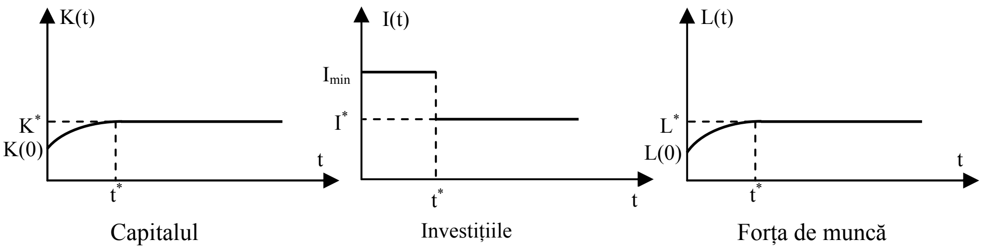

Figura 3.2

În concluzie traiectoriile optimale în cel mult 2 stadii sunt

1. Dacă $K(0) = K^*$: IV
2. Dacă $K(0) < K^*$: II $\rightarrow$ IV
3. Dacă $K(0) > K^*$: III $\rightarrow$ IV

Deoarece trecerea de pe traiectoria II pe traiectoria III sau reciproc nu este posibilă deoarece ar rezulta funcții ale multiplicatorilor nederivabile nu sunt admise soluții de câte trei traiectorii sau mai multe.