

DEFORMAȚIILE SUPRAFETELOR ÎN PROIECȚIILE CARTOGRAFICE

Doina Vasilca șef lucrări, Facultatea de Geodezie- U.T.C.B.

Alexandru Ilieș șef lucrări, Facultatea de Geodezie-U.T.C.B.

Rezumat

Se prezintă proiecțiile cartografice utilizate în România pentru realizarea lucrărilor de cadastru: proiecția stereografică 1970 și proiecția stereografică pe plan secant București. Se face o comparație între deformațiile produse de aceste proiecții.

Sunt date relațiile de transformare a coordonatelor între cele două plane de proiecție.

1. Introducere

În “Ordinul ministrului administrației publice privind aprobarea Normelor tehnice pentru introducerea cadastrului general” din 01.10.2001, referitor la execuția planurilor cadastrale de amplasament și delimitare a corpurilor de proprietate se precizează că acestea se execută în Sistem de proiecție stereografic 1970. Pentru cazurile în care suprafețele sunt mai mici de 10 ha și nu există posibilitatea efectuării măsurătorilor față de punctele rețelei geodezice se poate lucra în sistem local, urmând ca ulterior să fie integrate în Sistem de proiecție stereografic 1970.

2. Proiecția stereografică 1970 – generalități

Proiecția stereografică 1970 a fost adoptată în România în anul 1971, împreună cu sistemul de cote referite la Marea Neagră pentru efectuarea lucrărilor geodezice, topo-fotogrametrice și cartografice în sectorul civil.

Caracteristicile proiecției stereografice 1970

- Utilizează elipsoidul de referință Krasovski 1940 orientat la Pulcovo, deci așa-numitul "*sistem de coordonate 1942*".
- Coordonatele geografice ale polului proiecției Q_0 sunt:

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= 46^\circ \text{ latitudine nordică} \\ \lambda_0 &= 25^\circ \text{ longitudine estică.}\end{aligned}\quad (1)$$

- Întreaga țară se reprezintă pe un singur plan de proiecție, în care există un cerc de deformății nule de rază $\rho_0 = 201.718 \text{ km}$. În ceea ce privește deformățiile liniare și areolare, acestea sunt negative în interiorul acestui cerc, atingând valoarea maximă în centru ($D = -25 \text{ cm/km}$) și pozitive în afara lui.

- Proiecția stereografică 1970 este conformă, deci figurile infinit mici de pe elipsoid se reprezintă în planul de proiecție prin figuri asemenea.

- Sistemul de axe de coordonate rectangulare plane este definit astfel:

- originea este imaginea plană a polului Q_0 ;
- axa Ox este imaginea plană a meridianului axial λ_0 și are sensul pozitiv spre nord;
- axa Oy are sensul pozitiv spre est.

Se utilizează și "coordonate false":

$$\begin{aligned} x' &= x + 500000m \\ y' &= y + 500000m \end{aligned} \quad (2)$$

- Transformarea coordonatelor geografice în coordonate stereografice 1970 se face pe baza unui algoritm propus de Vladimir K. Hristov.

Pentru transformarea coordonatelor din planul tangent la elipsoid în polul $Q_0 (x_t, y_t)$, în planul secant de rază $\rho_0 (x_s, y_s)$, se utilizează un coeficient de reducere :

$$c = 1 - \frac{1}{4000} = 0.999750000 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} x_s &= x_t \cdot c \\ y_s &= y_t \cdot c \end{aligned} \quad (4)$$

Pentru transformarea inversă coordonatele din planul secant se multiplică cu coeficientul:

$$c' = \frac{1}{c} = 1.000250063 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} x_t &= x_s \cdot c' \\ y_t &= y_s \cdot c' \end{aligned} \quad (6)$$

- Calculul deformățiilor liniare și areolare se face pe baza formulelor:
Modulul de deformăție liniară în planul proiecției stereografice 1970:

$$\mu_s = c + \frac{x_s^2 + y_s^2}{4cR_0^2} \quad (7)$$

unde:

- $R_0 = 6\,378\,956\text{ m}$ este raza medie de curbură la latitudinea φ_0 ;

- x_s, y_s sunt coordonate stereografice 1970.

Deformația liniară relativă:

$$D = \mu - 1 \quad (8)$$

Modulul de deformație areolară:

$$p = \mu^2 \quad (9)$$

Deformațiile liniare relative în proiecția stereografică 1970 variază de la -25.00 cm/km , în imaginea polului proiecției, până la $+65.00\text{ cm/km}$ în punctele extreme ale țării.

Deformațiile areolare relative au valori cuprinse între -5.00 mp/ha în polul proiecției și $+12.76\text{ mp/ha}$ la distanța de 380 km față de acest punct.

În planșa din anexa 1 este prezentat aspectul izoliniilor deformațiilor areolare la reprezentarea României în proiecția stereografică 1970.

2. Proiecția stereografică 1930- plan secant București

2.1. Proiecția stereografică 1930 pe plan unic secant Brașov

Acesată proiecție, adoptată în România în anul 1930, are următoarele caracteristici:

- coordonatele geografice ale polului proiecției:

$$\varphi_0 = 51^{\text{G}}00^{\text{C}}00^{\text{CC}}.000 = 45^{\circ}54'00".0000 \quad (10)$$

$$\lambda_0 = 28^{\text{G}}21^{\text{C}}38^{\text{CC}}.510 = 25^{\circ}23'32".8772$$

- elipsoidul de referință utilizat este elipsoidul Hayford (1910) care are următorii parametri de bază:

$$\begin{aligned} a &= 6378388.000\text{m} \\ b &= 6356911.946\text{m} \\ \alpha &= 0.0033670034 \\ e^2 &= 0.0067226700 \\ e'^2 &= 0.0067681702 \end{aligned} \quad (11)$$

- punctul astronomic fundamental în care a fost orientat elipsoidul de referință este pilastrul de beton al Observatorului astronomic din București
- sistemul de axe de coordonate are originea în imaginea polului proiecției $Q_0(\varphi_0, \lambda_0)$, axa Oy are sensul pozitiv spre nord, iar axa Ox are sensul pozitiv spre est

Se utilizează și "*coordonate false*":

$$\begin{aligned}x' &= x + 500000m \\y' &= y + 500000m\end{aligned}\quad (12)$$

- Transformarea coordonatelor geografice în coordonate stereografice 1930 se face cu ajutorul formulelor lui Roussilhe.
- Pentru transformarea coordonatelor din planul tangent Brașov în planul unic secant se utilizează un coeficient de reducere:

$$c = 1 - \frac{1}{3000} = 0.99966667 \quad (13)$$

$$\begin{aligned}x_s &= x_t \cdot c \\y_s &= y_t \cdot c\end{aligned}\quad (14)$$

Pentru transformarea inversă coordonatele din planul secant se multiplică cu un coeficient:

$$c' = \frac{1}{c} = 1.00033344 \quad (15)$$

$$\begin{aligned}x_t &= x_s \cdot c' \\y_t &= y_s \cdot c'\end{aligned}\quad (16)$$

- Calculul deformațiilor liniare și areolare se face pe baza formulelor:
Modulul de deformație liniară în planul proiecției stereografice 1930:

$$\mu_s = c + \frac{x_s^2 + y_s^2}{4cR_0^2} \quad (17)$$

unde:

- $R_0 = 6\,379\,027.5\text{ m}$ este raza medie de curbură la latitudinea φ_0 ;
- x_s, y_s sunt coordonate stereografice 1930.

Deformația liniară relativă:

$$D = \mu - 1 \quad (18)$$

Modulul de deformare areolară:

$$p = \mu^2 \quad (19)$$

- Întreaga țară se reprezintă pe un singur plan de proiecție, în care există un cerc de deformări nule de rază $\rho_0 = 232.965 \text{ km}$. În ceea ce privește deformările liniare și areolare, acestea sunt negative în interiorul acestui cerc, atingând valoarea maximă în centru ($D = -33.33 \text{ cm/km}$) și pozitive în afara lui. În zonele limitrofe ale țării se obțin deformări liniare de $+55.39 \text{ cm/km}$.
- Proiecția stereografică 1930 este conformă, deci în planul de proiecție reprezintă unghiurile nedeformate.

2.2. Proiecția stereografică 1930- plan secant București

La reprezentarea orașului București în proiecția stereografică 1930 pe plan unic secant Brașov deformările liniare relative variază între -18.32 cm/km și -12.08 cm/km , iar deformările areolare relative iau valori între -3.68 mp/ha și -2.42 mp/ha . Pentru reducerea acestor deformări s-a ales un plan paralel cu planul secant Brașov, astfel încât cercul de deformări nule să treacă prin punctul de ordinul I "Foișorul de Foc" situat în centrul orașului. Coordonatele geodezice ale acestui punct în proiecția stereografică 1930- plan secant București sunt următoarele:

$$\begin{aligned} x &= 558113.037 \text{ m} \\ y &= 338400.272 \text{ m} \end{aligned} \quad (20)$$

La reprezentarea orașului București în acest plan de proiecție deformările liniare relative variază în intervalul -3.17 cm/km , pentru zona de nord a orașului și $+3.14 \text{ cm/km}$ pentru zona de sud. Deformările areolare au valori cuprinse între -0.64 mp/ha și $+0.63 \text{ mp/ha}$.

Considerând că suprafața municipiului București se înscrie într-un cerc cu centrul în punctul de ordinul I, Foișorul de Foc și de rază 15 km, în tabelul 2 sunt prezentate deformările liniare și areolare relative produse la reprezentarea în planele de proiecție stereografic 1970 și planul secant București.

Distanța de la polul proiecției stereografice 1970 până la Foișorul de Foc este de 194.400 km, iar de la polul proiecției stereografice 1930 până la același punct este de 171.731 km.

În anexa 2 sunt prezentate izoliniile deformațiilor liniare și areolare în zona orașului București la reprezentarea în aceleași plane de proiecție.

Tabelul 2

Proiecția stereografică 1970			Proiecția stereografică plan secant București		
Distanța de la pol [km]	Deformația liniară relativă [cm/km]	Deformația areolară relativă [mp/ha]	Distanța de la pol [km]	Deformația liniară relativă [cm/km]	Deformația areolară relativă [mp/ha]
180	-5.09	-1.02	156	-3.17	-0.63
182	-4.65	-0.93	158	-2.78	-0.56
184	-4.20	-0.84	160	-2.39	-0.48
186	-3.74	-0.75	162	-2.00	-0.40
188	-3.28	-0.66	164	-1.60	-0.32
190	-2.82	-0.56	166	-1.19	-0.24
192	-2.35	-0.47	168	-0.78	-0.16
194	-1.87	-0.38	170	-0.37	-0.07
196	-1.39	-0.28	171.731	0.00	0.00
198	-0.91	-0.18	172	+0.06	+0.01
200	-0.42	-0.08	174	+0.48	+0.10
201.718	0.00	0.00	176	+0.91	+0.18
202	+0.07	+0.02	178	+1.35	+0.27
204	+0.57	+0.12	180	+1.79	+0.36
206	+1.08	+0.22	182	+2.23	+0.45
208	+1.59	+0.32	184	+2.69	+0.54
210	+2.10	+0.42	186	+3.14	+0.63

2.3 Transformări de coordonate între proiecția stereografică 1970 și proiecția stereografică 1930 pe plan secant București

Pentru transcalcularea coordonatelor dintr-un plan de proiecție în altul se utilizează transformarea Helmert. Dintr-un număr de 47 de puncte, prezentate în figura din anexa 3, care au coordonate în cele două sisteme de proiecție s-a făcut o transformare iterativă, eliminându-se punctele care au eroarea totală mai mare de 8 cm (s-a considerat eroarea de determinare a unui punct de maximum 6 cm). În transformare au rămas 43 de puncte cu ajutorul cărora s-au determinat coeficienții de transformare directă și inversă.

Deoarece în cele două sisteme de proiecție axele nu au aceeași orientare s-au notat coordonatele cu n și e pentru a nu se crea confuzii.

Relațiile de transformare a coordonatelor din plan secant București (n_B, e_B) în planul proiecției stereografice 1970 (n_S, e_S):

$$\begin{aligned} n &= n_B - 337153.983 \\ e &= e_B - 556442.828 \\ n_S &= n \cdot 0.9999701427 + e \cdot 0.0048770952 + 326088.891 \\ e_S &= e \cdot 0.9999701427 - n \cdot 0.0048770952 + 587672.266 \end{aligned} \quad (21)$$

Relațiile de transformare a coordonatelor din planul proiecției stereografice 1970 (n_S, e_S) în plan secant București (n_B, e_B):

$$\begin{aligned} n &= n_S - 326088.891 \\ e &= e_S - 587672.266 \\ n_B &= n \cdot 1.000060723 - e \cdot 0.0048770952 + 337153.983 \\ e_B &= e \cdot 1.000060723 + n \cdot 0.0048770952 + 556442.828 \end{aligned} \quad (22)$$

Concluzii

Se remarcă faptul că referitor la reprezentarea municipiului București atât în planul proiecției stereografice 1970, cât și în proiecția stereografică 1930-plan secant București, cercul de deformării nule trece prin interiorul orașului, în primul caz prin partea de sud, iar în cazul al doilea prin centru.

Având în vedere domeniul de variație a deformărilor liniare și areolare produse de cele două sisteme de proiecție, comparate în tabelul 2, apreciem că pentru reprezentarea orașului București se poate renunța la utilizarea proiecției stereografice 1930 pe plan secant Foișorul de Foc în favoarea proiecției stereografice 1970.

Transformarea coordonatelor dintr-un sistem în altul se face ușor prin aplicarea relațiilor 21 și 22.

5. Bibliografie

- [1] BUGAYEVSKY LEV M., JOHN P. SNYDER, *Map Projections, A Reference Manual*, Taylor & Francis Ltd, 4 John St, London WCIN 2ET 1995.
- [2] CALISTRU V., MUNTEANU C-TIN, *Cartografie matematică*, Institutul de Construcții București, 1974, pag. 133-198.
- [3] MUNTEANU C-TIN., VASILCA D, *De la proiecția stereografică pe plan unic secant Brașov la proiecția UTM, în România*, Universitatea Tehnică de Construcții București., publicație aniversară, 1998 pag. 10-18.
- [4] SĂVULESCU C., MOLDOVEANU C-TIN., *Puncte de vedere privind harta digitală a României*, Revista de geodezie și cadastru nr.2, București, 1997 pag. 20-28.

[5] SNEYDER P. JOHN, *Map Projections, A Working Manual*, US Government Printing Office, Washington 1987.

